

ETAPAS EN LA DETERMINACIÓN DE UN SISTEMA DE ACCIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS

María de Lourdes Bravo Estévez
Universidad de Cienfuegos, Cuba.

José Joaquín Arrieta Gallastegui
Universidad de Oviedo, España.

Una de las habilidades fundamentales de las Matemáticas, como disciplina académica, es la de demostrar proposiciones; mediante la misma se contribuye a la formación del pensamiento lógico-deductivo, heurístico y creativo; a la formación lingüística, al desarrollo de operaciones mentales generales y de habilidades estrechamente relacionadas con ésta.

Las primeras demostraciones que se estudian en la escuela cubana están relacionadas con la Geometría; su tratamiento aparece en el currículo desde el último grado de la enseñanza primaria y se mantiene hasta los niveles superiores, elevando su exigencia a medida que aumentan los años de escolaridad. Sin embargo, una de las debilidades de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas es la resolución de problemas geométricos de demostración.

Como consecuencia de lo expresado hasta aquí, se presenta en este trabajo la determinación por etapas de un sistema de acciones que sirva de base para el desarrollo de la habilidad “demostrar” en los alumnos en formación para profesores de Matemáticas.

En relación a la enseñanza de las Matemáticas, Polya (1982) expresa que el primer deber de un profesor de esta materia es desarrollar en sus estudiantes la habilidad de resolver problemas, por lo que considera necesario influir con métodos de enseñanza favorables, propiciando una mejor comprensión de las operaciones típicamente útiles en su solución.

Como ejemplos de trabajos relacionados con las acciones que deben tenerse presente para resolver problemas podemos citar los siguientes:

- El Modelo de Polya (1982), que consta de cuatro partes: comprender el problema, proyectar un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Cada una de estas fases tienen subdivisiones y preguntas que hacerse para llevarlas a cabo.
- El Modelo I.D.E.A.L (la sigla representa los cinco elementos componentes del modelo) de Bransford y Stein (1986), sigue el modelo de Polya, pero el primer estadio lo subdividen en la identificación y definición, por un lado, y en la representación del problema por otro. Además lo aplican a diferentes situaciones en las que es preciso resolver problemas relacionados con la memoria, la comprensión y el aprendizaje, la crítica de razonamientos, la creatividad y la comunicación.
- El organigrama presentado por Gavilán (1996), donde se representa gráficamente un algoritmo. Planea la secuencia de las operaciones de un algoritmo para la resolución de problemas que, en esencia, coincide con los cuatro pasos de Polya, aunque éste sea más conciso y esté presentado mediante un diagrama.

En el conjunto de los problemas matemáticos se tienen en particular los problemas geométricos, los que pueden clasificarse por su contenido como problemas de cálculo, de construcción y de demostración.

Las demostraciones (entendidas en sentido amplio) deberían estar presente de forma subyacente en todos los componentes del currículo de matemáticas, según expresa Dreyfus (2000), manifestándose así de forma explícita la relevante importancia que tienen para la formación matemática del alumnado. Lo que no significa que los estudiantes deban reproducir las demostraciones de memoria, es decir, no asumir el formalismo del grupo Bourbaki, sino tener en cuenta, como ya hemos expresado en otro lugar (Arrieta, 1994) que la aceptación de un teorema por la comunidad matemática se realiza mediante un proceso social en que interesa más la comprensión y significado del mismo que el de la prueba rigurosa.

Para que el estudiante presente los problemas geométricos de demostración de forma correcta y con un sello particular distintivo, es necesario que se implemente un proceso paulatino de desarrollo de habilidades y capacidades de manera colectiva, donde se negocien los métodos y argumentos válidos,

convirtiéndose en una actividad social.

Por esta razón, se necesita del esfuerzo de investigadores y didactas para tratar formas y métodos de enseñanza para una mejor comprensión de las demostraciones por el alumnado. En este sentido, varios autores se han dedicado al estudio de la enseñanza de las demostraciones matemáticas de forma general, entre los que pueden citarse a Balacheff (1987), Hanna (1991) y de los más recientes, en España, Martínez (2000) e Ibañes (2002).

Sin embargo, otros trabajos se han dirigido a plantear pasos análogos a los citados por Polya para la resolución de problemas explícitamente de demostración, incluido él mismo, puesto que establece una similitud de sus pasos para las demostraciones, ya que ciertas preguntas y sugerencias de su lista son aplicables exclusivamente a los "problemas de determinación", y luego hace una adecuación para los "problemas por demostrar".

Podemos distinguir hasta seis modelos diferentes que detallan una secuencia de pasos dirigidos a enseñar las demostraciones matemáticas, modelos que citamos a continuación.

- El modelo de Jungk (1988), basado en pasos a seguir en la búsqueda de una demostración, pasos que están acompañados de una serie de reflexiones y de dos sucesiones de indicaciones destinadas específicamente al trabajo hacia delante y hacia atrás respectivamente. Éste difiere de los anteriormente mencionados en que, por estar destinado al profesorado, da varias orientaciones metodológicas acerca de cómo dirigir y aplicar el proceso de las acciones en cada paso para que el alumnado se apropie del esquema en general.
- El esquema heurístico de Wlasch para realizar independientemente demostraciones (Müller, 1984), donde en cada uno de los pasos se formulan preguntas que responden en forma similar a las citadas por Polya. Sin embargo, no se precisa en realizar el plan ideado (queda en términos de buscar) y adolece de una visión retrospectiva. La última orientación de este esquema es similar a una de las del organigrama de Gavilán, la que plantea que de llegar a una idea inútil no hay que temer el comenzar otra vez desde el principio.
- La propuesta de Valverde (1990), compuesta por un sistema de indicaciones para realizar la acción demostrar según una sucesión de pasos y de operaciones que el estudiante debe realizar. Además se explica metodológicamente el plan y se insiste en la capacitación de los estudiantes para el autocontrol de las acciones que se realizan. La sucesión de pasos de forma general es similar a la de Polya, pero con ciertas particularidades en lo que respecta al contexto algebraico en que se desenvuelve.
- Las acciones para demostrar proposiciones aportadas por Butkin (citado por Talízina, 1992), que se centran en la selección de información necesaria y suficiente, así como en las consecuencias indispensables que se derivan de ésta.
- La estrategia para el trabajo metodológico de Acosta (1996), que permite contribuir al desarrollo de las habilidades para demostrar proposiciones matemáticas, similar a la de Valverde, pero con rasgos que se adaptan a los estudiantes de la Enseñanza General.
- Las fases que debe tener presente el estudiante cuando se enfrenta a una demostración propuestas por Ibañes (2001), que incluyen la interpretación, el análisis, la síntesis y la profundización con los métodos, los estilos, los modos y las funciones de la demostración. En particular investiga en los esquemas de pruebas del alumnado.

Es interesante destacar que en casi ninguna de las propuestas señaladas anteriormente se cita de forma explícita el análisis de la posibilidad del uso del resultado o método en otro problema, como lo plantea Polya, lo que para el esquema de Acosta podría entenderse como determinar la ganancia metodológica del ejercicio resuelto, qué aportes brinda la demostración no sólo de la proposición en sí al cuerpo teórico, sino del procedimiento empleado y todas las explicaciones e interacciones que encierra. Tampoco hacen alusión directa a la discusión de otras vías de solución, utilizando otras estrategias o la combinación de ellas para su solución, lo que enriquece la formación matemática en todos los sentidos y es precisamente una buena oportunidad para el debate, la reflexión y la introducción de discursos con profundo significado crítico.

No se plantea la recogida de información independientemente de su utilidad relacionada con los términos que intervienen en la demostración, siendo uno de los rasgos de la creatividad, pues aunque uno piensa que no pueda ser útil, puede abrir un camino que conduzca a la solución. Este proceso está acompañado de un análisis y síntesis para discernir la información necesaria y suficiente (a la que se refiere Butkin) en cada una de las vías de solución.

Todas, por su carácter generalizador, son válidas para la realización de demostraciones geométricas, pero adolecen de acciones que fomenten el desarrollo de la imaginación espacial, aspecto

necesario en particular para las demostraciones estereométricas, y útil desde nuestra posición para el desarrollo del razonamiento inductivo.

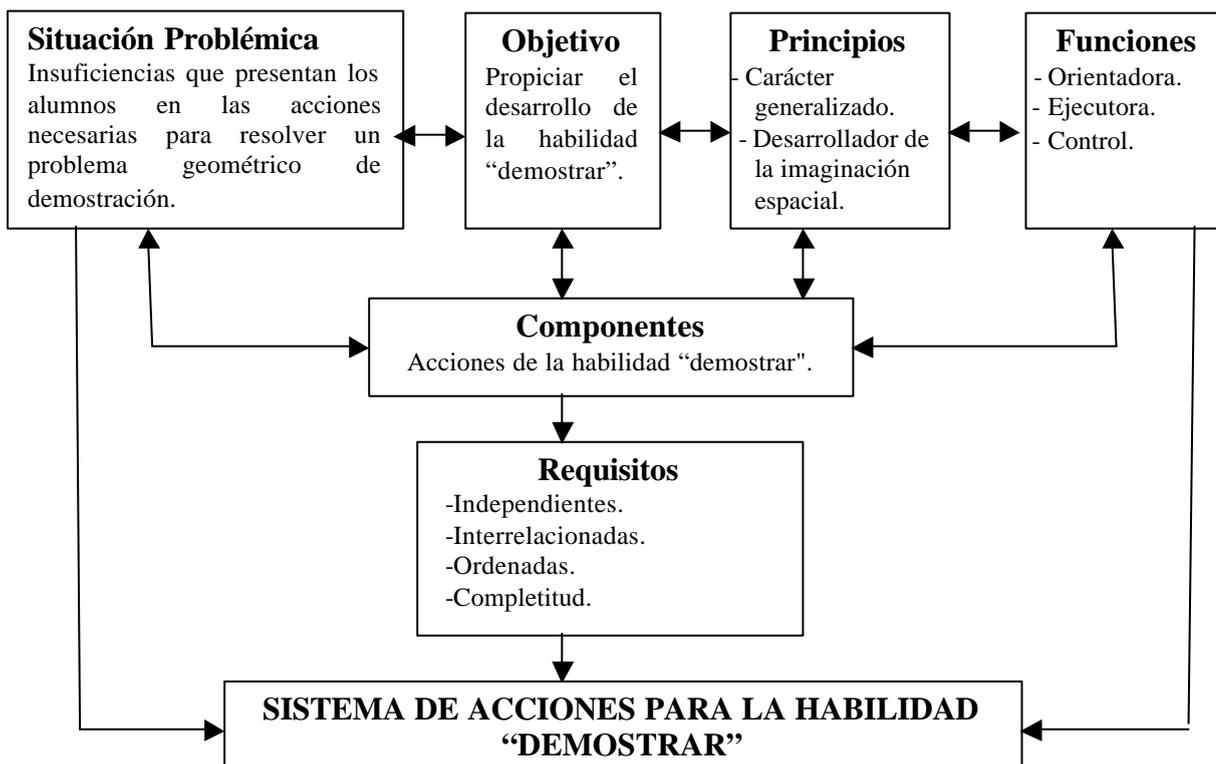
Por otra parte, los autores señalados no fundamentan explícitamente la concepción de las acciones como sistema. Aunque Butkin declara sobre la habilidad “demostrar” la inclusión de una serie de habilidades aisladas (acciones), cada una de las cuales hay que formarlas por separado y sólo después enseñar a utilizar las acciones formadas como un sistema único. Lo que desde nuestro punto de vista no significa concebir las acciones en un sentido lineal, siempre avanzando sólo hacia la solución y sin rodeos, sino que en su estructuración de sistema existe una interrelación entre las acciones, que a veces se necesita retroceder más de una vez y utilizar otros fundamentos distintos a los ya seleccionados.

Entre las definiciones más recientes del término “sistema”, destacamos la aportada por el profesor cubano Carlos Álvarez (1989), que propone una serie de etapas en la determinación de un sistema. En nuestro trabajo, además de recoger todas esas etapas, incluimos los “principios” sobre los que se sustenta el sistema de acciones propuesto para el desarrollo de la habilidad “demostrar”, como elemento importante en su estructuración.

Teniendo en cuenta las definiciones de sistemas estudiadas, definimos nuestro sistema, como la *combinación ordenada de acciones que, a pesar de que trabajan de manera independiente, se relacionan e interactúan entre sí, con el fin de alcanzar un desarrollo significativo de la habilidad “demostrar”, contribuyendo a la formación geométrica de los alumnos.*

En la determinación del sistema de acciones para el desarrollo de la habilidad “demostrar” se tienen en cuenta un conjunto de etapas que representamos en el siguiente esquema:

ETAPAS EN LA DETERMINACIÓN DE UN SISTEMA DE ACCIONES QUE SIRVA DE BASE PARA EL DESARROLLO DE LA HABILIDAD “DEMOSTRAR”



Las etapas citadas están en una interrelación dinámica, las cuatro primeras se concatenan en los componentes y, en consecuencia, en sus requisitos, y viceversa, por lo que la relación que se establece entre ellas no es lineal, sino entrelazada.

En la conformación del sistema de acciones que tribute al desarrollo de la habilidad “demostrar”, se parte de la **determinación de la situación problemática**, la que está dada por las insuficiencias que presentan los alumnos en las acciones necesarias para resolver un problema geométrico de demostración.

A partir de esta situación problemática se persigue como **objetivo** del sistema, propiciar el desarrollo de la habilidad “demostrar” en los alumnos en formación para profesores de Matemáticas, tal que puedan resolver con independencia y creatividad problemas geométricos de demostración.

El sistema se sustenta en dos **principios**:

1. PRINCIPIO DEL CARÁCTER GENERALIZADO.

El sistema de acciones puede ser utilizado en diversas áreas de las matemáticas (y en otras fuera de esta que requieran de la habilidad “demostrar”), puede transferirse a otros contenidos y ser aplicable también a cualquier caso particular, de aquí su carácter generalizado, independientemente de que haya sido confeccionado en el ámbito de la Geometría, para lo que es útil aprovechar los nexos entre los distintos complejos de materia partiendo de lo específico de cada una de ellas, que conduzcan a la generalización, siendo fundamentales para este fin formular procedimientos específicos que se salgan de los marcos de una asignatura, aunque sea para el dominio de ella.

2. PRINCIPIO DESARROLLADOR DE LA IMAGINACIÓN ESPACIAL.

Cada acción del sistema por separado y en su totalidad, está concebida para potenciar el desarrollo de la imaginación espacial, pues modelar la situación, mentalmente primero, y gráficamente después, estableciendo en el modelo los nexos y relaciones entre toda la información recopilada, requiere de un buen desarrollo de la imaginación espacial para comprender la demostración en todo su proceso y luego dilucidar otras vías de solución.

Para modelar la situación es necesario recurrir a diversos ángulos, estudiando en ellos las distintas propiedades de los elementos que intervienen en la demostración, seleccionando las pertinentes para una mejor visualización y asimilación del fenómeno en cuestión, no colocándose en una perspectiva estrictamente individual, sino eligiendo aquellas posiciones a representar para una mejor comprensión por parte de una tercera persona.

Las **funciones** del sistema son las siguientes:

1. FUNCIÓN ORIENTADORA.

El sistema orienta hacia el modo de actuación para la resolución de los problemas geométricos de demostración, lo que posibilita la apropiación del conocimiento y el desarrollo de hábitos y habilidades, así como de capacidades. Es el momento del qué hacer y cómo hacerlo, sin perder la relación objetivo–conocimiento–habilidad–métodos–procedimientos–medios. Brinda este sistema la estructura de la acción, es decir, el algoritmo de trabajo o los pasos lógicos para la realización de demostraciones geométricas.

Esta función está relacionada con la utilización por el estudiante del conjunto de acciones que brinda el sistema, para el exitoso cumplimiento de las demostraciones geométricas, las que constituyen el contenido de la base orientadora para la acción.

2. FUNCIÓN EJECUTORA.

La ejecución posibilita la adquisición de conocimientos sobre la base de los procedimientos que permitan ejecutar las acciones que conforman el sistema para el desarrollo de la habilidad “demostrar”, en una primera fase bajo la orientación del profesor, con la presentación del modelo, y después de forma independiente por parte del alumnado.

Esta función asegura las transformaciones del estudiante en el objeto de cada una de las acciones que conforman el desarrollo de la habilidad. Es como un mecanismo de trabajo.

La función ejecutora no se trata de una simple reproducción en que se abusa de la memoria para demostrar cierta proposición geométrica, sino, ante todo, de un análisis de los términos que intervienen junto a los conocimientos a los que se puede recurrir para resolver la situación por diferentes vías.

3. FUNCIÓN DE CONTROL

La función de control está dirigida a seguir la marcha de cada acción que conforma la habilidad, a confrontar los resultados obtenidos con los modelos dados; con su ayuda se hace la corrección necesaria en la orientación y ejecución de la acción, es como un mecanismo que observa y compara.

El desarrollo de la habilidad “demostrar” sustentado en su estructura interna, se concibe como un proceso gradual y diferenciador de las acciones propuestas, partiendo del diagnóstico inicial individual que se hace de cada una de éstas en la resolución de las demostraciones geométricas por parte de los estudiantes. Se valora el control desde lo cuantitativo y cualitativo, hasta dónde llega el alumno en el proceso de demostración, teniendo en cuenta las potencialidades individuales y su desarrollo paulatino en cada acción.

Por su parte, los **componentes** del sistema son las acciones de la habilidad “demostrar” propuestas en este trabajo, que son las siguientes: identificar la premisa y la tesis a partir de la comprensión del problema, modelar la situación, reformular el problema, recopilar la información relacionada con el problema

independientemente de su utilidad, seleccionar el método de demostración, representar la demostración y analizar los resultados según las distintas vías de solución.

Los componentes del sistema tienen un conjunto de **requisitos**, que son:

1. LAS ACCIONES SON INDEPENDIENTES UNAS DE OTRAS.

Cada acción propuesta para ejecutar la habilidad “demostrar” actúa de forma independiente, con un objetivo determinado en su momento. Estas tienen sus operaciones (que por sí solas constituyen habilidades), las cuales necesitan de conocimientos y procedimientos para su ejecución.

La independencia puede ejemplificarse como, para recopilar la información independientemente de su utilidad, es necesario no formar esta acción de forma mecánica, ya que en las demostraciones hay que utilizar la información sobre la base de que sea la necesaria, pero a la vez la suficiente, pues de lo contrario las fundamentaciones carecen de sentido, son vagas.

2. LAS ACCIONES ESTÁN INTERRELACIONADAS ENTRE SÍ.

Además de trabajar de forma independiente, según el objetivo que persigue en particular, las acciones del sistema están interrelacionadas, mantienen una estrecha relación para lograr el objetivo final, pues cada una de las acciones por sí solas no conduce a la realización de una demostración. Cada acción tiene sus características peculiares, pero se necesitan unas a otras para que en su ejecución en conjunto permitan desarrollar la habilidad; es como si se ayudaran para lograr un objetivo común.

Como ejemplo citamos que, para reformular el problema se necesita de la identificación de la premisa y la tesis, porque de lo contrario el cambio de reformulación que se realice no sería el que corresponda a esa demostración.

3. LAS ACCIONES SE EJECUTAN EN UN ORDEN DETERMINADO POR EL PROPIO SUJETO

El orden de ejecución de las acciones lo dispone el alumno, de acuerdo con sus características, en ocasiones algunos prefieren primero modelar la situación y luego identificar premisa y tesis, aunque luego sea necesario volver al modelo; otros, después de identificar premisa y tesis, recopilan la información independientemente de su utilidad para modelar o valorar los métodos de demostración después.

Por otra parte, debe tenerse en cuenta un orden según las etapas de orientación, ejecución y control dentro del proceso de una demostración. Esto no significa que las funciones del sistema estén repartidas en algunas acciones, pues en cada una de ellas están presentes las tres funciones del sistema y por lo tanto en su conjunto, sino que en la forma de actuar de cada acción en una demostración se presentan ordenadas de acuerdo a las distintas funciones.

Sin embargo, el orden establecido de las acciones en correspondencia con las funciones no debe alterarse, las acciones pueden cambiar su orden, pero dentro del conjunto en que se han situado según corresponda a las etapas de orientación, ejecución y control. Las cinco primeras acciones son necesarias para la representación de la demostración, mientras que si añadimos la sexta, ya podemos realizar el análisis de los resultados según las distintas vías de solución. En este sentido se habla entonces del requisito de estar ordenadas.

4. DEBEN ESTAR TODAS LAS ACCIONES NECESARIAS

El sistema cumple con la completitud, en otras palabras, los componentes caracterizan al sistema como completo, lo que significa que están presentes las acciones en el sistema para ejecutar la habilidad “demostrar”, esto es, las acciones propuestas son las necesarias para demostrar.

De forma general puede plantearse que para implementar el sistema no debe existir una abstracción de las condiciones externas, sino que debe estar en correspondencia con la caracterización del alumnado, del profesorado y de la asignatura, en estrecha relación con los requerimientos educacionales del momento y los retos de la sociedad.

La validación del sistema la hicimos en tres etapas: la del criterio de expertos para conocer las opiniones sobre las características del sistema, la fase experimental para comprobar la efectividad del mismo en cuanto al desarrollo de la habilidad “demostrar” y la encuesta para conocer la opinión de los estudiantes en cuanto a la influencia del sistema en su grado de satisfacción al resolver los problemas geométricos de demostración y en el grado de aceptación por el estudio de la Geometría. Siguiendo para ello la estrategia de triangulación que nos permitió comparar los datos obtenidos según las tres técnicas aplicadas: el Método Delphi, el Diseño Cuasiexperimental del tipo “grupo de control no equivalente” y una encuesta a los estudiantes.

Al comparar los resultados obtenidos en las tres direcciones anteriores podemos concluir que el sistema de acciones, por sus características, propició cambios significativos en el desarrollo de la habilidad “demostrar” en los estudiantes, así como elevó la motivación e interés por el estudio de la Geometría, en

particular de los problemas geométricos de demostración.

BIBLIOGRAFÍA

- ACOSTA FUERTE, Idael. (1996). *Una estrategia metodológica para el desarrollo de la habilidad demostrar proposiciones matemáticas en los grados 10-12 del subsistema de enseñanza de EGPL*. Tesis doctoral, Instituto Superior Pedagógico de Ciego de Ávila. (Cuba).
- ÁLVAREZ DE ZAYAS, Carlos. (1989). *Fundamentos teóricos de la dirección del proceso docente-educativo en la Educación Superior Cubana*. La Habana: ENPES.
- ARRIETA GALLASTEGUI, José. (1994.). Las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria. ¿Cambio curricular para que todo siga igual?. *Signos. Revista de Teoría y Práctica de la Educación*, núm. 13, 70-81.
- BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation (Proving processus and situations for validation). *Educational Studies in Mathematics*, 18, pp. 147-176.
- BRANDSFORD, J. D. y STEIN, B. S. (1986). *Solución IDEAL de problemas. Guía para pensar mejor, aprender y crear*. Barcelona: Labor, S. A.
- BRAVO ESTÉVEZ, María de L. (2002). *Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas*. Tesis doctoral, Universidad de Oviedo. (España).
- DREYFUS, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del currículum. En Gorgorió, N., Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó, S. L., 125-133.
- GAVILÁN BOUZAS, Paloma. (1996). Historia del Álgebra en la educación secundaria: resolución de problemas históricos. *Suma. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, 22, 83-84.
- HANNA, G. (1991). Mathematical proof. En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. University of Warwick: Kluwer Academic Publishers, 54-61.
- IBAÑES JALÓN, M. J. (2001). *Aspectos Cognitivos del Aprendizaje de la Demostración Matemática en los Alumnos de Primer Curso de Bachillerato*. Tesis doctoral, Universidad de Valladolid. (España).
- IBAÑES JALÓN, M. J. y ORTEGA DEL RINCÓN, Tomás. (2002). La demostración en el currículo: una perspectiva histórica. *Suma. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, 39, 53-61.
- JUNGK, W. (1988). *Conferencia sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática 2*. La Habana: Libros para la Educación.
- MARTÍNEZ RECIO, Ángel. (2000). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática*. Tesis doctoral, Universidad de Granada. (España).
- MÜLLER, Horst. (1984). *Inferencia lógica y demostraciones en la enseñanza de la Matemática*. La Habana: Pueblo y Educación.
- POLYA, G. (1982): *Cómo plantear y resolver problemas*. 10^{ma} reimpresión. México: Trillas, S. A.
- TALÍZINA, Nina (1992): *La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares*. México: Ángeles.
- VALVERDE RODRÍGUEZ, Lourdes (1990): *Un método para contribuir a desarrollar la habilidad para fundamentar-demostrar una proposición matemática tomando como base una asignatura de primer año de los Institutos Superiores Pedagógicos*. Tesis doctoral, Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona. (Cuba).

Contactar

Revista Iberoamericana de Educación

Principal OEI