ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LAS FUNCIONES DE LA DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS

María de Lourdes Bravo Estévez, Universidad de Cienfuegos, Cuba.
José Joaquín Arrieta Gallastegui, Universidad de Oviedo, España.

Si nos detenemos a pensar qué aporta una demostración a la formación intelectual de un individuo, a su forma de pensar y actuar, entonces estamos valorando su función como parte integrante del currículo de las Matemáticas.

Cuando se habla de las funciones de la demostración, siempre nos viene a la mente la de *verificación*, la que tradicionalmente se ha considerado siempre en primer lugar. El profesorado no asume su verdadero papel cuando piensa de esta forma estricta, sin cuestionarse lo que puede aportar la enseñanza y el aprendizaje de las demostraciones a la formación integral del alumnado. Sin embargo, varias investigaciones se han desarrollado en torno al tema, de tal forma que se ha ampliado la lista de sus funciones.

Se describen a continuación algunos de los trabajos de investigación que se han dedicado al estudio de las funciones de las demostraciones y en una segunda parte nuestra propia reflexión incorporando la función formativa que pueden tener intrínsecamente las demostraciones matemáticas.

A partir de la función de *verificación* de una demostración, que es la que todos comúnmente le atribuimos, pues precisamente con ella se busca la certeza o verdad de una proposición, Bell citado por Ibañes (2001a), considera la de *iluminación* (se espera que una buena demostración proporcione ideas del por qué es cierta) y la de *sistematización* (organización de un sistema deductivo de la teoría: axiomas, definiciones y teoremas ya demostrados con anterioridad).

Continua con estas ideas De Villiers (1993), que critica a los que sólo le adjudican a la demostración la función tradicional de *verificación*, incluso sospecha que la mayoría del profesorado de Matemáticas en secundaria mantienen exclusivamente esta visión formalista. Este autor, destaca además la función de *explicación* de las demostraciones (de manera similar a como hacía Bell con la de *iluminación*), pues no es sólo cuestión de asegurarse, sino de explicar por qué la proposición es cierta, de hacer la actividad significativa, a la vez que constituye una motivación. En correspondencia con Bell toma también la función de *sistematización*, pues la demostración integra conceptos, afirmaciones y teoremas en sí, exponiendo su estructura axiomática y ayudando a las aplicaciones tanto dentro como fuera de las Matemáticas.

Incluye en su lista de funciones la de *descubrimiento*, pues a menudo es un método de exploración, análisis, inventiva que en ocasiones lleva a nuevos resultados; y la de *comunicación,* como una manera de expresar los resultados ante otros profesionales, al profesorado y ante los propios estudiantes, es un forum para el análisis crítico de aciertos y desaciertos. En fin, es un *reto intelectual* entre lo desconocido y conocido.

Siguiendo el modelo de De Villiers, Ibañes (2001b) desdobla la función de verificación en dos diferentes: comprobación y convencimiento. Además, junto a las consideraciones realizadas por anteriores investigadores, propone un ejemplo de la función *descubrimiento* y obtiene un gran número de teoremas derivados de uno inicial aplicando las estrategias de descubrimiento de Polya.

Por su parte Hanna (2000), siguiendo a Bell y De Villiers incorpora además la función de *construcción* de una teoría empírica, la de *exploración* del significado de una definición o la consecuencia de una suposición y la *incorporación* de un nuevo conocimiento hecho a una nueva estructuración.

Otros investigadores analizan las funciones de la demostración desde su experiencia en el aula; es el caso de Hersh (citado por Ibañes, 2001a) que diferencia entre la función de *convencer* a expertos en una materia, con el fin de la demostración en el aula, que es más bien la de *explicar* un resultado.

Por su parte, Reid (citado por Ibañes, 2001a) pretende conciliar los puntos de vista del alumnado y del profesorado sobre las demostraciones. Más adelante el autor (2002) propuso cinco dimensiones de una demostración, entre las que destacaremos la *necesidad* y el *rol* que juegan en la comunidad matemática por su importancia reconocida como una característica definida y un elemento central de las Matemáticas. La necesidad la define como el propósito o la función de la demostración y la valora como explicación (coincide con De Villiers en que puede constituir un elemento de motivación), exploración y verificación fundamentalmente, aunque cita también la iluminación y la comprensión.

Van Asch (citado por Ibañes, 2001a) distingue entre los estudiantes que *hacen* demostraciones de los que sólo le dan la utilidad *instrumental*, y por tanto no la desarrollan, limitándose a conocer el significado de la misma para utilizarla en la resolución de posteriores problemas. Aporta además un conjunto de funciones según la respuesta a la primera parte de la siguiente pregunta: ¿qué argumentos puede haber para presentar -primera parte- u omitir demostraciones?, funciones que citamos a continuación: *convencer, entender, memorizar, contener un algoritmo, finalizar un proceso de búsqueda, exponer un método, mostrar el significado de una definición.* Expone, también, las funciones de la enseñanza de la demostración con respecto a los estudiantes, que son las siguientes: *aprender, entender, comprender, desarrollar habilidades comunicativas, obtener los conceptos de generalización, particularización* y *analogía.*

Recio (2001) destaca una cita de Villiers donde éste se pronuncia en el sentido de que si queremos que el profesorado de Matemáticas asuma las funciones de la demostración para convertirlas en una actividad significativa, entonces deberían haberse formado en situaciones similares durante su propio proceso de formación profesional docente.

En este sentido, Recio (2001) se plantea diferenciar entre el papel de la:

- Demostración en la enseñanza (lo que ocurre con la demostración en el quehacer docente).
- Enseñanza de la demostración (lo que habría que hacer para enseñar a demostrar).

Distingue además el autor, para la demostración en la enseñanza universitaria, dos funciones que podrían incorporarse a las ya citadas:

1) Como parte esencial del contrato didáctico en Matemáticas: por una parte el profesorado se ve obligado a demostrar en clases y el alumnado atento a descubrir cualquier error en la prueba que le presentan.

2) Una fuente insustituible de entretenimiento: considera el análisis y la comprensión de las mismas por los estudiantes como formas peculiares de razonar y usar los hechos básicos de la teoría que explica.

Las funciones descritas actúan entre sí de la manera que se representa en el esquema siguiente:

INTERACCIÓN DE LAS FUNCIONES 1 Y 2

FUNCIÓN 1 ⟷ FUNCIÓN 2

RETROALIMENTACIÓN

El docente le enseña al estudiante a demostrar mostrando cómo demuestra él.

Esta posición implica entregar la demostración de manera ya descodificada, lo cual entendemos que supone plantear una actividad con poco significado, que se olvida habitualmente al cruzar las fronteras del aula. Compartimos la idea de Recio (2001) cuando afirma que lo que arroja comprensión es la acción de intentar demostrar personalmente o al menos intentar descifrar personalmente una demostración de otro.

Desde nuestro punto de vista de la experiencia en el aula con la formación del profesorado en el desarrollo de la habilidad “demostrar” en Geometría, además de intentar concretar las funciones aportadas por dichos autores, pretendemos contribuir al desarrollo de una función *formativa*, de forma más integradora, como explicamos a continuación.

Es indispensable significar el valor de que los estudiantes apliquen en la práctica el saber y el poder adquiridos, para comprender de forma más exacta cómo por medio de sus conocimientos es posible describir procesos de la realidad objetiva, a la necesidad del por qué vincular la teoría con la vida para fundamentar y/o demostrar los fenómenos que ocurren. Todo esto contribuye a la *consolidación* más duradera de los conocimientos, así como a la *formación de una concepción científica* del mundo. Por eso la relación entre la teoría y la práctica debe tenerse en cuenta también como un principio didáctico en cada clase, buscando siempre que sea posible, los nexos entre las demostraciones de proposiciones geométricas con sus aplicaciones y hechos de la vida diaria.

Por otra parte, debe evitarse que con la adquisición de conocimientos que se trasmiten en las aulas, se tenga la idea de que la Geometría es sólo el sistema de conocimientos que ellos reciben, una noción de teorías acabadas, que tiene una validez absoluta, para que, en su lugar, acepten sin dificultades nuevas y variadas teorías que nieguen dialécticamente, completen y abarquen a las anteriores. Sin embargo, los conocimientos recibidos previamente son ciertos, reflejan de forma objetiva la parte de la realidad estudiada, pero el alumnado, con los escasos recursos de que dispone debe *verificarlos* por sus propios medios, *comprobando* y *convenciéndose* a sí mismo y al resto de los individuos que interactúan con él.

De esta forma el alumnado va vinculando los entes geométricos con los objetos del mundo real y las propiedades de ellos dadas por las definiciones, teoremas y sus demostraciones con sus relaciones y leyes. Poniéndose de manifiesto la dialéctica de la verdad absoluta y la verdad relativa. Es decir, la dialéctica entre los conocimientos relativos, que encierran un contenido objetivamente verdadero que se conserva en el proceso de adquisición de los conocimientos, y los conocimientos incompletos, no definitivos en su reflejo de la naturaleza, la sociedad y el pensamiento. Se contribuye así, a través de la enseñanza de las demostraciones a ampliar su *formación filosófico-ideológica*.

En este proceso se llega a propiedades geométricas que son para el estudiante *descubrimientos*, pues hasta el momento le eran desconocidas, a la vez que va *explicando* el por qué de la necesidad de su demostración.

Punto de sumo cuidado también, es el de no caer en el formalismo con la elaboración de los teoremas y sus demostraciones, evitar que se reproduzcan demostraciones fijando un patrón, y que sean capaces de *interpretar, valorar* o *comprender* las mismas cuando se varían algunas de las condiciones iniciales. Por ello, debe darse paso a la realización de una amplia ejercitación y aplicación de los teoremas y sus demostraciones de forma gradual y sistemática, a la *explicación* de todas las posibles variantes mediante la *reflexión* individual y/o colectiva de cada posible vía de solución, donde los estudiantes *buscan, discuten y analizan* diferentes formas de proceder, de vías de solución y múltiples posibilidades de modelar situaciones bajo la *sistematización* y *actualización* de los conocimientos. Así es posible que se ponga de manifiesto el *pensamiento creativo y la fantasía, el pensamiento lateral o divergente, el pensamiento especulativo, el pensamiento heurístico y el pensamiento lógico-deductivo.*

Al modelar la situación a través de la figura de análisis debe tenerse en cuenta la *estética*, reflejada en la limpieza, el cuidado, el esmero y la curiosidad en los trazos en función de que las representaciones de las figuras tridimensionales tienden a desfigurarse en el plano, por lo que deben ser lo más legibles posibles. Esta cualidad es además un rasgo de la *ética pedagógica* por la que se rige la formación del profesorado en Matemáticas. También se da paso al desarrollo del *pensamiento geométrico espacial*, como un reflejo generalizado del espacio físico tridimensional basado en modelos, el cual se manifiesta cuando los estudiantes forman un sistema de conceptos y relaciones mediante abstracción del espacio real, en que pueden representar, mediante dibujos o modelos reflejos del espacio e imaginar nuevos cuerpos y relaciones geométrico- espaciales.

Precisamente en el debate de las vías de solución, de las figuras pertinentes, en los aportes de la demostración, debe exigirse una correcta expresión oral, no considerada sólo como un medio de comunicación, sino también como una manifestación del pensamiento. Ello porque el hecho de exigir una expresión adecuada contribuye a la *formación lingüística*, al desarrollo del lenguaje propiamente matemático con la utilización correcta del vocabulario técnico de la asignatura y se ponen de manifiesto rasgos de la conducta como son *el rigor en sus razonamientos, la exigencia y el carácter reflexivo.*

A los efectos de la formación multilateral del alumnado, del desarrollo de su pensamiento y lenguaje, tiene también el trabajo con teoremas matemáticos y sus demostraciones una poderosa influencia sobre el desarrollo de capacidades generales para *argumentar, fundamentar, inferir, refutar y deducir.*

Las demostraciones también contribuyen al desarrollo de operaciones mentales generales tales como *abstraer, concretar, analizar, sintetizar, comparar, clasificar, particularizar y generalizar*.

Se destaca la importancia del proceso seguido por encima del resultado, por lo que brinda *métodos y procedimientos* de trabajo, no sólo es la proposición de la demostración para el enriquecimiento del cuerpo teórico que ampliará el estudiante para sí, sino el procedimiento y método empleado que constituye un modelo para otras demostraciones.

Al tratar las demostraciones el profesorado debe propiciar un dominio de acciones, de procedimientos heurísticos y métodos de demostración, de solidez de los conocimientos para su aplicación segura, de forma que contribuyan a trabajar de modo *racional, planificado y orientado.* Al plantear exigencias a los estudiantes para evaluar el rendimiento de sus compañeros en las demostraciones, para discutir soluciones verdaderas y falsas, para juzgar propuestas y asumir posiciones, se manifiestan cualidades como la *sinceridad, la crítica y la autocrítica*.

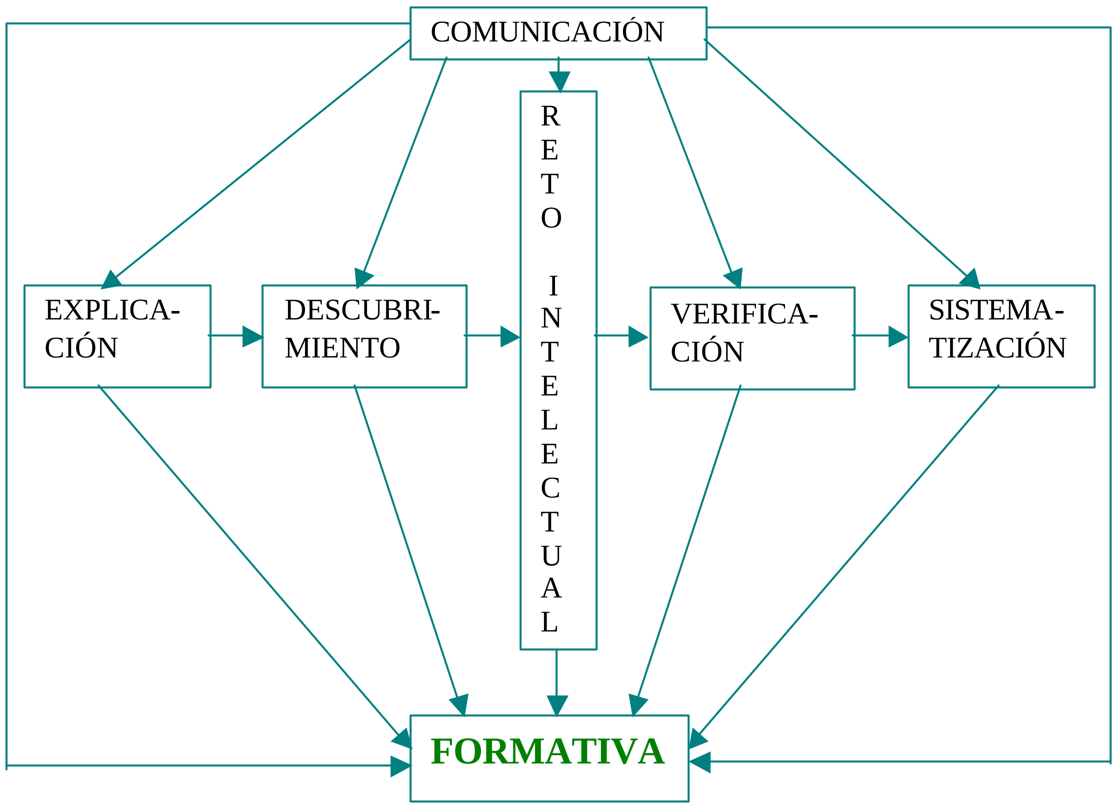
Por todos es conocido que las demostraciones de proposiciones matemáticas son un punto neurálgico para los estudiantes en el estudio de las Matemáticas, por lo que hay que incentivar la *tenacidad, perseverancia, esfuerzo, disciplina y constancia* a lo largo del proceso de resolución de un problema de demostración, para así llegar a lograr la *independencia* en la realización de éstas, se convierte en un *reto intelectual* ante el deseo de adquirir nuevos conocimientos, métodos de trabajo y desarrollo del pensamiento en sentido amplio.

No olvidar que el profesorado puede realizar valoraciones del comportamiento de sus estudiantes en el proceso de demostración ante el colectivo, estimulando las actitudes positivas y señalando las que aún deben ser mejoradas, la atención personalizada y a la diversidad. De esta manera se propicia al *compañerismo, la complacencia y la conducta colectiva.*

Si integramos lo que reporta el proceso de "demostrar" desde lo instructivo y lo educativo, concluimos, a la vez que ampliamos, el conjunto de funciones descritas en el apartado anterior con la función *formativa*.

Las funciones de la demostración están presentes en todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, pudiendo representarse mediante el siguiente esquema, tomando como punto de partida el propuesto por De Villiers (1996c:5).

FUNCIONES DE LAS DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS



Si trabajamos con las demostraciones hasta convertirlas en una actividad significativa y necesaria, entonces, desde nuestro punto de vista, perdurarán en la formación profesional de los educandos de tal manera que podrán transmitir sus significados a otros individuos, logrando así el verdadero papel de los problemas de demostración en el currículo de las Matemáticas, en las diferentes enseñanzas según corresponda a su posterior actividad profesional.

Por tanto, es indiscutible el destacado aporte del tratamiento de las demostraciones al proceso docente educativo desde las tres dimensiones citadas por Álvarez (1999), a saber, la dimensión instructiva, la educativa y la desarrolladora, pues permiten fijar el sistema de conocimientos, el sistema de habilidades y el sistema de valores de una determinada asignatura y/o disciplina, entre otros aspectos. Es un recurso didáctico universal para desarrollar conocimientos, habilidades y valores, de aquí su importancia en la formación del profesorado y, por ende, en la enseñanza en general.

Luego de abordar y fundamentar las funciones de la demostración, reflexionamos ante el interesante interrogante de Recio (2001:1) cuando se pregunta: *¿es posible, es conveniente, es necesario enseñar a demostrar en la Geometría que se imparte en un sistema educativo generalizado?.*

En correspondencia con los estudiados de investigaciones realizados, la propia experiencia profesional, las opiniones hasta el momento expresadas y respetando los criterios de voces autorizadas que puedan ser opuesto a los argumentos que exponemos, nuestra respuesta es la siguiente:

- Sí es posible enseñar a “demostrar” en un sistema educativo generalizado, teniendo en cuenta los diferentes niveles de demostración, en correspondencia con los objetivos de cada enseñanza y las características tanto individuales como colectivas del alumnado, del contexto y del momento.
- Sí es conveniente enseñar a “demostrar” en un sistema educativo generalizado, dada la riqueza de las distintas funciones de la demostración, como hemos visto, por su carácter formativo e integral, es decir, por integrar lo cognitivo en lo educativo en sentido general.
- Sí es necesario enseñar a “demostrar” en un sistema educativo generalizado, como lo puede ser saber contar, a partir de su utilidad práctica como elemento que contribuye, entre otros, al desarrollo del pensamiento, de operaciones mentales generales, de habilidades generales y específicas, así como a la formación lingüística, aspectos son todos ellos de gran utilidad para preparar a las personas a enfrentarse de una forma más racional a la solución de los problemas que se les pueden presentar en su quehacer diario.

Las tres respuestas se relacionan entre sí, una no responde las interrogantes que encierra la pregunta, porque cada una de ellas tiene sus atenuantes, que la fundamentan desde el proceso docente-educativo generalizado, y su consecuente importancia para que el profesorado en formación aprenda a “demostrar” para luego poder enseñarlas.

En resumen, defendemos en este trabajo que las demostraciones van mucho más allá de lo que a enseñanza y aprendizaje se refiere, llegando a los marcos educativos. Así, concluimos que la enseñanza de las demostraciones geométricas tiene un significativo valor educativo, cumplen con una función formativa esencial.

En la enseñanza de las demostraciones geométricas se concatenan lo cognoscitivo con lo educativo, y potenciar lo último conlleva a una educación más integral, donde se buscan los modos de actuación, en el caso de las carreras pedagógicas con la formación del profesorado.

BIBLIOGRAFÍA

ALSINA, C., BURGUÉS, C. y FORTUNY, J. (1996). *Enseñar Matemáticas*. Barcelona: Graó, S. L.

ALSINA, C., BURGUÉS, C. y FORTUNY, J. (1987). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Madrid: Síntesis, S.A.

ALSINA, C., FORTUNY, J. y PÉREZ, R. (1997). *¿Por qué Geometría?. Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis, S. A.

ÁLVAREZ DE ZAYAS, C. (1999). *La escuela en la vida*. La Habana: Pueblo y Educación.

ARRIETA GALLASTEGUI, J. J. (2002). Reflexiones en torno a las relaciones entre dos disciplinas científicas: las Matemáticas y la Didáctica de las Matemáticas. En Penalva Martínez, M., Torregosa Gironés, G. y Valls González, J. (Coords.). *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*. Universidad de Alicante: Compobell, S. L., 281-290.

BRAVO ESTÉVEZ, M. L. (2000). *Propuesta de un sistema de acciones didácticas para la enseñanza de las demostraciones en Estereometría*. Trabajo de investigación, Universidad de Oviedo. (España).

BRAVO ESTÉVEZ, M. L. (2002). *Una propuesta didáctica para el desarrollo de la habilidad "demostrar" en el estudio de la Estereometría*. Tesis de maestría, Universidad de Cienfuegos. (Cuba).

De VILLIERS, M. (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Revista Epsilon,* 26, 15-30.

DREYFUS, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N., Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó, S. L., 125-133.

FIOL, M. L. (2001). Demostración. Reflexiones en torno a la demostración. Recopilación de textos preparados por miembros del Grupo de Trabajo "Aprendizaje de la Geometría" de la SEIEM. En: http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html

HANNA, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44(1/2), 5-23.

IBAÑES JALÓN, M. J. (2001a). *Aspectos Cognitivos del Aprendizaje de la Demostración Matemática en los Alumnos de Primer Curso de Bachillerato*. Tesis doctoral, Universidad de Valladolid. (España).

IBAÑES JALÓN, M. J. (2001b). Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento. *Suma. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, 37, 95-98.

IBAÑES JALÓN, M. J. y ORTEGA DEL RINCÓN, T. (2002). La demostración en el currículo: una perspectiva histórica. *Suma. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, 39, 53-61.

RECIO, T. (2001). La mecánica de la demostración y la demostración mecánica. En: http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html

REID, D. A. (2002). What is proof?.
En: http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/02Ete/WhatIsProof.pdf

Contactar

Revista Iberoamericana de Educación

Principal OEI