

ANÁLISIS Y CATEGORIZACIÓN DE ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN ALUMNOS QUE INGRESAN A LA UNIVERSIDAD

Marcel David Pochulu
Univeridad Nacional de Villa María, Argentina

1. CONSIDERACIONES GENERALES

Sabemos que los errores forman parte de las producciones de la mayoría de los alumnos, y constituyen, generalmente, un elemento estable en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en todos los niveles del sistema educativo. Asimismo, si tenemos en cuenta que el correcto aprendizaje de la Matemática es un objetivo común en los procesos de enseñanza de la misma, es claro que las respuestas incorrectas a las cuestiones que se les plantean a los estudiantes serán consideradas – por parte de quienes están a cargo de su instrucción – como señales de serias deficiencias, e incluso fracaso en el logro de los objetivos propuestos.

Si bien el error puede tener procedencias diferentes, generalmente tiende a ser considerado como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimientos. Es de destacar que los errores no aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente, y todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debido a diferentes causas, algunas de las cuales se presentan inevitablemente. También se debe tener en cuenta que las oportunidades de los estudiantes para aprender Matemática dependen del entorno y del tipo de tareas y discurso en que participan, dependiendo lo que aprenden de cómo se implican en las actividades matemáticas, lo que marca, a su vez, las actitudes que tienen hacia esta ciencia.

Sabemos que la Matemática cuenta con un espacio curricular obligatorio en el nivel primario y secundario del sistema educativo, y sólo está presente en algunas carreras del Nivel Terciario y/o Universitario; en consecuencia, los alumnos que egresan del Nivel Medio son una fuente importante de información sobre la formación matemática recibida en no menos de 13 años de enseñanza formal. Esta situación nos llevó a formular la primera pregunta directriz de la investigación del siguiente modo:

- ¿Qué errores detectan frecuentemente los Profesores de Matemática en el aprendizaje de sus alumnos durante la formación de Nivel Medio?

A su vez, resulta frecuente escuchar a los profesores universitarios de Matemática emitir juicios acerca de la formación matemática recibida por sus alumnos en ciclos anteriores y sobre todas las deficiencias que presentan en los aprendizajes logrados. Basándonos en esta apreciación, formulamos nuestra segunda pregunta directriz de investigación:

- ¿Cuáles son los errores, que han sido señalados por los Profesores de Matemática, que aún persisten en el aprendizaje logrado por los alumnos cuando ingresan a la Universidad?

Por otro lado, numerosos investigadores consideran que los errores en Matemática no tienen un carácter accidental, sino que surgen por las estrategias y reglas personales empleadas en la resolución de

problemas, y devienen de experiencias particulares e interpretaciones realizadas con base en los conocimientos matemáticos iniciales. Así, surge como tercera pregunta directriz de la investigación:

- *¿Cuáles son las causas y motivos posibles que pudieran hacer prevalecer en los alumnos ciertos errores en el aprendizaje logrado en Matemática?*

Puesto que en muchas ocasiones la terminología utilizada en el ámbito educativo puede llegar a resultar confusa, ya que un mismo término es usado con sentidos diversos, y a veces, distintos términos se refieren al mismo o muy similar concepto; asumimos que:

“Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar”. Godino, Batanero y Font (2003, p. 69).

Asumiendo que los errores de los estudiantes no son casuales, ya que están basados en conocimientos y experiencias previas, pudiendo tener diferentes causas que los motivan (dificultades didácticas, epistemológicas, cognitivas, de actitudes, entre otras), se convierte en el objetivo general de la investigación:

- *Analizar las dificultades y errores en el aprendizaje de conceptos y procesos matemáticos de los alumnos, durante su formación de Nivel Medio, al ingresar a la Universidad.*

Justificación del estudio

La intención de esta investigación se encuentra no sólo en el análisis de los patrones de error que cometen los alumnos, los que pueden revelar errores sistemáticos que sean síntomas de concepciones inadecuadas, sino también en determinar qué conviene que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los alumnos, puesto que se podrían proporcionar claves sobre qué estrategias pueden resultar las más convenientes a la hora de llevar adelante los procesos de enseñanza y aprendizaje en Matemática.

Asimismo, también pensamos que los errores pueden emplearse como instrumento de motivación y como punto de partida para exploraciones matemáticas creativas de los alumnos, lo que implicaría que se desarrollen actividades valiosas de planteamiento y resolución de problemas. Por otra parte, pueden proporcionar una comprensión más completa y profunda del contenido matemático y de la propia naturaleza de la Matemática, ayudándonos a investigar cuestiones relativas a la enseñanza y aprendizaje de la misma, a las que generalmente resulta difícil acercarse por otra vía.

2. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

El estudio de los errores en el aprendizaje de la Matemática ha sido de permanente interés para diferentes investigadores y se ha caracterizado por aproximaciones e intereses muy disímiles. En las diferentes épocas el análisis y categorización de los errores se ha visto condicionado por las corrientes predominantes en Pedagogía y Psicología, como así también, condicionado por los objetivos y formas de organización del currículo en Matemática.

En las primeras décadas del siglo XX, los trabajos de investigación se circunscribieron al análisis de errores cometidos en Aritmética por alumnos de los primeros años escolares. Una excepción, según Cury

(1994), fue la investigación llevada a cabo por Smith – en Estados Unidos – en tanto trabajó con alumnos de la *high school*, sobre errores en demostraciones de Geometría.

En Alemania, por esa misma época y sin que mediaran intercambios entre investigadores americanos y europeos, también aparecieron los primeros trabajos sobre errores, los que posiblemente se vieron influenciados por la importancia que tuvo la Pedagogía Empírica, la cual empleaba técnicas de introspección propias de la Psicología Experimental.

Una segunda fase en el análisis de los errores aconteció a partir de los años 50, sobre el enfoque que se le dio al procesamiento de la información. La cibernética de Wiener, la teoría de la información de Shannon, los trabajos de Bruner y las experiencias de Newell y Simon, abrieron nuevas puertas para las investigaciones en diversas áreas del conocimiento y así surgieron nuevos métodos y abordajes para los problemas que se venían estudiando. Estos teóricos del procesamiento de la información compartían el supuesto de que la mente humana poseía una estructura semejante a la de una computadora, la cual procesa la información a través de una serie de memorias.

A partir de los estudios del procesamiento humano de la información, Brown y Burton desarrollaron un programa de ordenador denominado *Buggy*, con la finalidad de estudiar los errores sistemáticos cometidos por los alumnos en operaciones de sustracción. Cury (1994) destaca que el conocimiento de los tipos de errores de sustracción que cometen los estudiantes es ahora tan detallado que se han escrito programas de inteligencia artificial que cometen los mismos errores que los estudiantes, proporcionando al software sólo unos cuantos principios básicos. Asimismo, la teoría sobre la generación de *bugs* ha empezado a proporcionar ideas sobre las mejores y peores elecciones de ejemplos y sobre los métodos más eficaces para seleccionar material. La autora también señala que todas las experiencias en análisis de errores, utilizando ordenadores, han influenciado notablemente muchas de las investigaciones realizadas en Estados Unidos y América Latina, las que se divulgaron a través de numerosos Congresos.

Ya sea desde una perspectiva conductista o del procesamiento humano de la información, el análisis de los errores en Matemática estuvo limitado, hasta esa época, a una función diagnóstica y reparadora. Los investigadores se preocuparon por clasificar los errores para permitir a los profesores una modificación de las estrategias de enseñanza, con la intención de tornarlas más eficaces, y por ende, reforzar una visión absolutista de la Matemática, en tanto se procuraba dotar a los alumnos de medios que permitieran alcanzar la verdad absoluta y se evitaran los errores.

Rico (1995) argumenta que la mayor parte de los estudios sobre errores, realizados con anterioridad a 1960, han consistido en recuentos del número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas y un análisis de los tipos de errores detectados, para proceder luego, a una clasificación que permita determinar cómo surgen los errores a partir de la solución correcta, en la que se hacen inferencias sobre qué factores pueden haber conducido al error.

A partir de la década del sesenta y en los años posteriores, las aplicaciones e implicaciones al campo de la educación comenzaron a proyectarse en forma notable y el abordaje del error tuvo una visión más constructivista, en tanto se estimuló su ocurrencia puesto que brindaba posibilidades para el sujeto constructor de conocimiento. Radatz (1980) lleva a cabo una revisión de gran parte de las investigaciones realizadas sobre errores, tanto en Estados Unidos como en Europa, hasta finales de los años 70, encontrando

que la Aritmética constituyó el área de contenidos dominante en la mayor parte de los estudios, y que existe una pluralidad de aproximaciones teóricas e intentos de explicación de sus causas.

Un abordaje más amplio sobre las posibilidades de la utilización del análisis de errores en los procesos de enseñanza y aprendizaje ha sido presentado por la investigadora italiana Raffaella Borasi. En sus trabajos, según Cury (1994), se incluyen las ideas de Kuhn, Lakatos, Piaget y Vergnaud, y la autora propone nuevos rumbos para el análisis de errores. Además del papel tradicional del análisis de errores, en el sentido de identificar y clasificar los errores cometidos por los alumnos y proponer estrategias para eliminarlos, Borasi plantea otras posibilidades: usar los errores como instrumentos para explorar el funcionamiento de la mente (Piaget, Vergnaud); aprovechar los errores como elementos fundamentales para el desarrollo de una disciplina (Kuhn, Lakatos); avanzar, partiendo de los errores que se cometen en la programación de ordenadores, en la comprensión del lenguaje de programación utilizado y en los propios contenidos trabajados (Papert).

En síntesis, las investigaciones en análisis de errores pueden ser agrupadas en torno a dos objetivos principales: la superación del error a través de su eliminación, o a través de la exploración de sus potencialidades. En la primera categoría se encuentran las investigaciones realizadas por la influencia del conductismo y del procesamiento de la información. En segundo lugar, aparecen los trabajos más recientes de carácter constructivista. No obstante, cabe aclarar que esta división no es rígida y pueden ser encontrados los dos objetivos en algunos trabajos.

3. SOBRE EL DISEÑO METODOLÓGICO.

El presente estudio es de naturaleza diagnóstico-descriptivo y se ubica en la línea de análisis de errores, en tanto se busca analizar y categorizar los errores cometidos por los alumnos egresados del Nivel Medio, al resolver problemas y/o ejercicios correspondientes a contenidos matemáticos abordados en el Ciclo Básico Unificado y Ciclo de Especialización de la escuela secundaria. Para ello, seguimos los procedimientos de investigación que a continuación exponemos.

3.1 Entrevistas con Profesores de Matemática.

Para determinar los errores que con mayor frecuencia cometen los alumnos en el aprendizaje de la Matemática, hemos entrevistado a profesores del área con amplia experiencia en la docencia – en tanto presentan una antigüedad en el ejercicio de sus funciones comprendida entre los 12 y 27 años – y desarrollan sus actividades en centros educativos públicos y privados de la ciudad de Villa María.

En total colaboraron 13 profesores, a quienes previamente se les explicó los objetivos del trabajo y se acordaron momentos posteriores para la entrevista, puesto que se intentó dar tiempo suficiente para que reorganizaran la información solicitada, y evitar, por otro lado, obtener respuestas triviales o fútiles.

3.2 Diseño del instrumento.

Con la información recabada durante las entrevistas realizadas a los Profesores de Matemática, se confeccionó el primer diseño del instrumento, el cual consistió básicamente en una serie de situaciones matemáticas de solución única a las que había que dar una respuesta. La primera versión de la evaluación

fue administrada a 27 alumnos del sexto año del Nivel Medio de la ciudad de Villa María en el mes de noviembre del año 2003.

Culminada la fase de prueba del instrumento y posterior ajuste, se confeccionó una versión definitiva de la evaluación, la cual consta de 45 situaciones problemáticas distribuidas en 8 ejercicios. Cada una de los ejercicios se obtuvo de los ejemplos que dieron los profesores en las entrevistas, adaptados, a su vez, a las situaciones que planteaban las diferentes investigaciones empíricas relativas al tema.

3.3. Aplicación del instrumento.

Al instrumento elaborado bajo las condiciones enunciadas anteriormente se le dio la denominación de “Evaluación de Conocimientos Previos” y fue administrado en la tercera clase del Curso de Ingreso a la UNVM, la cual se correspondió con el viernes 6 de febrero de 2004. A fin de evitar que los alumnos dieran respuestas poco pensadas o dejaran sin responder algunos de los ejercicios planteados, se le dio la jerarquía de una evaluación más, la cual debía ser aprobada dentro del Curso de Ingreso.

3.4. Entrevistas con los alumnos.

Se realizaron entrevistas con los alumnos que habían realizado estas evaluaciones, con el propósito de profundizar los aspectos que no quedaron claros en las respuestas brindadas y para complementar la información de algunas cuestiones que no fueron consideradas en la misma. Asimismo, con la entrevista se intentó determinar los posibles patrones de error que contenían sus desarrollos.

3.5. Categorización de los errores.

Si bien no partimos de una categorización de errores previamente establecida –puesto que la misma puede ser considerada como emergente del trabajo – no podemos desestimar que su construcción se halló condicionada por las categorías señaladas en las investigaciones consultadas sobre el tema. Así, el proceso final de construcción de la categorización de errores devino de las convergencias realizadas entre las categorías que surgieron del análisis de las respuestas vertidas por los alumnos en la “Evaluación de Conocimientos Previos”, y las que se proponían en las investigaciones consultadas sobre el tema.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

4.1. Los errores en el aprendizaje de la Matemática desde la perspectiva de los profesores

Durante las entrevistas con los Profesores de Matemática fue posible obtener información relevante sobre los errores que habitualmente cometen los alumnos durante la formación de Nivel Medio.

Así, en el tercer ciclo de la Educación General Básica, los Profesores de Matemática aducen que los errores más frecuentes de sus alumnos se encuentran cuando:

- Aplican la “regla de los signos” de la multiplicación al efectuar sumas o restas de números enteros.
- Suman números racionales efectuando la adición de numeradores por un lado y denominadores por el otro.

- Dividen números racionales aplicando el algoritmo de la multiplicación.
- Resuelven divisiones donde el dividendo es un 0, pensándolo como 1, o ignorando su presencia.
- Simplifican fracciones dividiendo al numerador y denominador por números distintos.
- Asocian que un decimal periódico se obtiene, en todos los casos, como una fracción cuyo numerador es igual al número sin la coma y con su período truncado; o expresando la parte entera como numerador y el período como denominador.
- Consideran que tienen un número negativo elevado a cierto exponente cuando el signo menos se antepone a la potencia.
- Recuperan el esquema de multiplicación reiterada, con factores negativos, cuando el exponente de la potencia es un entero negativo.
- Asumen que toda potencia de exponente nulo da por resultado cero, o es igual a la base de la misma.
- Aplican distributivas de la radicación con respecto a la suma y/o resta.
- Estiman que la raíz con radicando negativo e índice impar tiene un doble resultado, o que no posee solución en el campo de los reales.
- Decodifican incorrectamente los valores representados por literales en una recta numérica.
- No logran determinar jerarquías ni tipos de operaciones que intervienen en los términos de una ecuación.
- Consideran que un factor negativo se transpone dividiendo y cambiado de signo; o que forma parte de una resta por lo que se pasa sumando al otro miembro.
- Transponen factores como dividendos, y no como divisores.
- No identifican las figuras geométricas elementales cuando se presentan en posiciones “no estándar”.
- Suponen que la altura de un triángulo siempre es un segmento interior a la figura.
- Brindan respuestas que prescinden de las unidades de medida en problemas que involucran magnitudes.
- Por otra parte, para el Ciclo de Especialización, los Profesores de Matemática establecieron que los errores más comunes de los alumnos son los siguientes:
- Identifican la semántica de potencias con base entera y exponente fraccionario negativo, con tomar el inverso multiplicativo del exponente.
- Asocian que si el exponente de una potencia es un entero negativo, y la base es una suma algebraica, se debe tomar en primera instancia los inversos multiplicativos de los sumandos.
- Multiplican las raíces de igual índice y radicando cuando se tratan de adiciones, o aplican distributiva de la raíz con respecto a la suma algebraica.

- Ofrecen como resultados de sumas algebraicas entre números racionales e irracionales, sólo una expresión que involucra una determinada cantidad de radicales.
- Asocian que el exponente de la potencia de un producto, afecta sólo a uno de los factores.
- Distribuyen la potencia con respecto a la suma algebraica.
- Asumen que el denominador de una fracción divide sólo a uno de los sumandos del numerador.
- Encuentran redundante la presencia del signo “-” cuando se sustituyen números negativos en una expresión en las que aparecen restas.
- Expresan como una potencia la suma de literales.
- Brindan un resultado numérico cuando a cierta cantidad de literales se le resta sólo uno de ellos.
- Extraen factores de un radical ajustándose a un algoritmo, y sin tener en cuenta si están en el numerador o denominador de una fracción.
- Aplican distributivas cuando tienen el cociente entre un número y una suma algebraica.
- Suman los exponentes de las potencias de otras potencias.
- Realizan traducciones incorrectas de las expresiones que aparecen en las situaciones problemáticas.
- Conciben que cualquier letra siempre representa a un número positivo, y que simboliza un negativo si se le antepone el signo menos.
- Aplican la fórmula para hallar las raíces de una ecuación de segundo grado, sin cerciorarse que la expresión se encuentre igualada a cero.
- No logran interpretar coherentemente la información que deviene de una gráfica.
- Utilizan todos los datos que aparecen en un problema sin tener en cuenta si el cálculo realizado responde a la pregunta solicitada.

Cabe aclarar que los errores detallados por los Profesores de Matemática se circunscribieron, casi con exclusividad, a la Aritmética y al Álgebra, y sólo se citaron algunos de ellos en temas de Geometría. Por otro lado, ningún docente puntualizó errores de sus alumnos en Estadística y Probabilidades.

Esta situación deja, al menos, dos caminos posibles para su interpretación: los alumnos no cometen errores significativos en áreas como Geometría, Estadística y Probabilidades; o, la Geometría, Estadística y Probabilidades ha sido relegada por los docentes de la currícula de Matemática del Nivel Medio, por lo que no les resultó posible reconocer errores en estos campos de conocimiento.

Por último, cabe señalar que en la bibliografía consultada sobre errores, surgen muchos otros que no fueron señalados por los Profesores de Matemática, llevándonos a conjeturar que posiblemente no ha sido una actividad importante de los docentes la identificación de los errores típicos que cometen los estudiantes.

4.2. Los errores en el aprendizaje de la Matemática en alumnos que ingresan a la Universidad.

Con el trabajo de investigación que llevamos a cabo, hallamos que los errores que fueron señalados por los Profesores – durante la formación matemática de los alumnos en el Nivel Medio – aún persisten y, en muchos casos, son particulares de cada uno de ellos. Asimismo, encontramos que las vías mediante las cuales se presentaron los errores guardaron correspondencia con las estipuladas por Brousseau, David y Werner (citados en Rico 1995). Así, los errores aparecieron en las producciones de los alumnos debido a: concepciones inadecuadas sobre aspectos fundamentales de la Matemática; resultados de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado y totalmente identificable; utilización de procedimientos imperfectos y concepciones inadecuadas que no pudimos reconocer; y empleo de métodos y estrategias inventadas, no formales pero originales, para la realización de algunas de las situaciones propuestas.

No obstante, llama la atención que los errores señalados para diferentes ejes temáticos abordados en la EGB, aún prevalecen en las producciones de los alumnos, siendo que en el Ciclo de Especialización se recuperan, amplían y profundizan los contenidos abordados previamente, mejorando su organización, forma de comunicación o la aplicación a nuevos temas o problemas.

Es de destacar que la totalidad de los alumnos que participaron del estudio cometieron algún tipo de error en la evaluación administrada; en consecuencia, no existieron trabajos que prescindieran de equivocaciones y desaciertos. De todos modos, tampoco hubo evaluaciones completamente erradas. Esto nos estaría mostrando, en cierta forma, que los errores forman parte de las producciones de la mayoría de los alumnos, y constituyen un elemento estable en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Así, las siguientes situaciones, presentadas en un orden decreciente de complejidad y sin que por ello deba restárseles importancia, se perfilaron como altamente generadoras de errores en las producciones de los alumnos:

- Plantear en términos de una ecuación lineal una expresión del lenguaje coloquial.
- Hallar expresiones algebraicas fraccionarias equivalentes a una dada.
- Resolver potencias de índice par cuando se antepone un signo negativo a la misma.
- Interpretar información procedente de una representación gráfica.
- Calcular potencias con exponente fraccionario y negativo.
- Extraer factores de un radical cuando los mismos se hallan en el denominador de una fracción.
- Reconocer figuras planas a través de sus definiciones formales.
- Encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado aplicando una fórmula de resolución.
- Trabajar con ejercicios combinados que involucren potencias de sumas y/o restas con exponentes negativos.
- Determinar el valor de raíces de índice impar y radicando negativo.
- Distinguir el valor que simbolizan los literales en una recta numérica.

- También encontramos otras situaciones que llevaron a cometer equivocaciones, aunque en menor cantidad si se comparan con las anteriores, las que podrían conducir a que aparezcan errores en las producciones de los alumnos. Entre ellas tenemos:
- Expresar una variable de una ecuación lineal en términos de la otra.
- Determinar el valor del cociente en divisiones cuyo dividendo es un cero.
- Calcular raíces de sumas y/o restas de números enteros.
- Aplicar la propiedad distributiva de la potencia con respecto al producto entre números y literales.
- Reconocer alturas en un triángulo.
- Formular respuestas en términos de las magnitudes involucradas en un problema.
- Establecer equivalencias entre expresiones decimales periódicas y fraccionarias.
- Realizar operaciones combinadas con números enteros.
- Resolver potencias con exponentes enteros negativos.
- Hallar la solución a ecuaciones lineales de una variable.
- Con la categorización de errores conformada, hemos determinado que el 72% de las equivocaciones que presentaron las producciones de los alumnos se repartieron entre:
- Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas, generados por la aplicación de reglas y propiedades justificadas en esquemas similares, o por inferirse que son válidas en contextos parecidos o relacionados.
- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial, atribuidos a deficiencias en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales, que llevan a interpretaciones incorrectas de información o hechos matemáticos.
- Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos, causados por la carencia de aprendizajes relativos a hechos, destrezas y conceptos, que inhiben totalmente el procesamiento de la información e impiden dar una respuesta a la situación.
- Del mismo modo, otro 27% de las situaciones resueltas incorrectamente presentaron patrones de error que se distribuyeron entre las siguientes categorías:
- Errores debidos al lenguaje matemático, producidos por una traducción incorrecta de hechos descritos en un lenguaje natural a otro más formal, o de un lenguaje simbólico o icónico a otro simbólico o icónico distinto.
- Errores eventuales debidos a deficiencias en la construcción de conocimientos previos, causados por aprendizajes incorrectos o inadecuados de hechos, destrezas y conceptos que interfieren en un adecuado procesamiento de la información.

- Errores debidos a la recuperación de un esquema previo, causados por la persistencia de algunos aspectos del contenido o del proceso de solución de una situación, aún cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se había modificado.

Cabe acotar que no tuvieron injerencias, en la evaluación administrada a los alumnos, los errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales. Este hecho lo atribuimos a que las situaciones planteadas demandaron desarrollos relativamente cortos, lo que aminoró la transferencia equivocada de símbolos y números involucrados en cada ejercicio, y por lo tanto, disminuyeron las posibilidades de cometer errores de esta naturaleza.

Por último, notamos que si bien en las situaciones relacionadas con ecuaciones los estudiantes tenían la posibilidad de realizar un análisis retrospectivo de la solución, no encontramos ni un solo caso – aún entre quienes resolvieron correctamente los ejercicios planteados sobre el tema – que llevaran a cabo esta estrategia. Simplemente se limitaron a la aplicación de una fórmula o a efectuar las transformaciones que consideraron adecuadas, sin mediar otro proceso. Esto marca de por sí un fenómeno clásico interesante, puesto que la mirada retrospectiva permite soslayar muchos de los errores que se cometen en la resolución de problemas, y sin embargo, no parece ser pensado de esta manera por los alumnos.

4.3. Causas y motivos de la persistencia de los errores en el aprendizaje de la Matemática.

La revisión bibliográfica llevada a cabo nos ha mostrado que gran parte de los errores que cometen los alumnos en Matemática se remontan a obstáculos epistemológicos que los propios matemáticos enfrentaron y superaron a través de siglos de historia. Esta situación nos advierte sobre las dificultades que pueden acarrearle al alumno la mayoría de los contenidos que se abordan en el Nivel Medio, los que de ninguna manera son triviales, y requieren, por otra parte, de mucho tiempo para su apropiación y consolidación.

De todos modos, pensamos que el error también está vinculado a los procesos de enseñanza y aprendizaje, en tanto el entendimiento humano, de alguna manera, es causa directa de él. Además, diversos investigadores han señalado que parte de las dificultades que presentan los alumnos son debidas a estrategias de enseñanza inadecuadas llevadas a cabo por los profesores. En este sentido, acordamos con la apreciación, y del análisis llevado a cabo de los errores registrados en las producciones de los alumnos, inferimos que gran parte de las equivocaciones cometidas tienen su origen en procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática con características como:

- Uso exacerbado de técnicas algorítmicas o rutinas sin fundamentos teóricos,
- Utilización de reglas poco trascendentes como requisitos indispensables en la ejecución de cálculos aritméticos o resolución de ecuaciones,
- Desarrollos muy apegados a lo algebraico y escasamente relacionados con la resolución de problemas,
- Abordaje de contenidos completamente descontextualizados y poco articulados con los restantes,

¹ Booth (1984), Chamorro (1995), Di Blasi Regner y Otros (2003), Godino, Batanero y Font (2003), Jaime, Chapa y Gutiérrez (1992), Martínez (2002), entre otros.

- Escasa importancia otorgada al desarrollo de competencias relacionadas con la lectura crítica de datos y análisis de gráficas,
- Abuso de prototipos visuales que inhiben la formación de imágenes conceptuales,
- Tratamientos de problemas demasiado centrados en lo numérico.

Por otra parte, los Profesores de Matemática entrevistados han argumentado que la mayoría de los errores que encuentran en el aprendizaje de esta ciencia se deben a que los alumnos no están acostumbrados a leer consignas, volver a realizar la lectura de un problema, reflexionar sobre lo realizado, buscar datos relevantes, preguntas o una estrategia de resolución, entre otras acciones. Valoración que guarda relación con la apreciación realizada por Rico (1995) cuando argumenta que los alumnos no toman conciencia del error, pues no cuestionan lo que les parece obvio y no consideran el significado de los conceptos, reglas o símbolos con que trabajan.

Asimismo, los profesores aducen que muchas veces los alumnos leen un enunciado – casi siempre en forma incompleta – y quieren tener la respuesta en forma instantánea. Si no la obtienen en pocos segundos, recurren de manera inmediata al docente o a un compañero que sabe resolver la situación. Gómez (1995) explica que esta actitud del estudiante tiene una causa natural, puesto que el profesor resuelve un ejercicio y la solución se presenta “en limpio”, sin que haya la menor indicación del proceso “de borrador” por medio del cual se llegó a la misma. En consecuencia, el estudiante piensa que él también debe encontrar la solución “en limpio” y no es conciente de que, para solucionar un ejercicio, debe tener un método o estrategia adecuada, por lo que busca atajos. Estos atajos lo desvían del camino apropiado y lo inducen a cometer errores.

Al mismo tiempo, también es frecuente ver que en muchos casos los alumnos desean saber simplemente el algoritmo que permite resolver un ejercicio, sin preocuparse por los conceptos subyacentes o las ideas involucradas en el tema. Cuando estas ideas son explicadas, es común observar que los alumnos se “desconectan” dejando pasar ese ruido molesto (la voz del docente) y esperan la llegada del momento en que se les dice “cómo se hace”, “cuál es la receta”, en tanto perciben a la Matemática como un conjunto fijo de conocimientos pulidos y acabados.

Lampert, citado en Vilanova y otros (2001), da una explicación a esta creencia que sustentan no sólo alumnos, sino muchas personas allegadas al entorno educativo, pues expresa que la visión que tienen de la Matemática está asociada con la certeza y el saber Matemática lo relacionan con seguir, recordar y aplicar las reglas que propone el docente – ya sea cuando hace una pregunta o plantea una tarea – la que se adquiere en la escuela a través de años de mirar, escuchar y practicar. Una vez más, vemos que el problema queda centrado en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática que son llevados a cabo en las aulas.

Finalmente, también debemos reconocer que muchos de los errores que los estudiantes cometen en Matemática, no se deben específicamente al tema que se está desarrollando, sino a carencias de conocimientos previos que se trasladan a los nuevos contenidos que se abordan. Tal vez debamos aceptar que siempre habrá alumnos cerrados a las ideas, a quienes sólo les interese aprobar estudiando y sabiendo lo indispensable, y debamos alegrarnos, por lo tanto, con las pequeñas victorias. No obstante, creemos que es válido el intento por revertir estas actitudes y visiones que tienen los alumnos acerca de la Matemática, y en este sentido, el desafío y la responsabilidad les corresponde a los profesores.

5. A MODO DE CIERRE.

Sabemos que la enseñanza de la Matemática es una práctica compleja y por tanto no reducible a recetas o prescripciones. Si bien no creemos que se pueda encontrar una metodología para el tratamiento de los errores en Matemática que sea universalmente aplicable, no significa que no existan estrategias que puedan ser más o menos adecuadas o aconsejables para cada situación concreta. Así, por ejemplo, creemos que si el error es calificado como nocivo o perjudicial por el docente, no producirá ningún efecto positivo en los alumnos, y sí muchos negativos, como inseguridad, pérdida de confianza, concepción de la Matemática como una ciencia austera y arbitraria, etc.

Estamos convencidos que la corrección sistemática del error no favorece su eliminación, y esto puede verse reflejado en nuestro trabajo, en tanto no hallamos producciones de los alumnos que prescindieran de equivocaciones, a pesar de los intentos que pudieran haber realizado los Profesores de Matemática del Nivel Medio. Por el contrario, creemos que un camino posible se encuentra intentando que los alumnos sean los que perciban los errores. Darle lugar al error en la clase es trabajarlo descubriendo las hipótesis falsas que llevaron a producirlo, buscando los posibles caminos hasta redescubrir los conceptos validados y matemáticamente aceptados, comparando versiones correctas con erróneas, etc.

El estudiante debe participar activamente en el proceso de superación de sus propios errores; y no es suficiente decirle al alumno cuál es el camino correcto o cuál es la solución. Debe ser el alumno el que reconozca que su saber es insuficiente o inadaptado, pues de lo contrario continuará recurriendo a él. Si el error es descubierto como consecuencia de una interacción o debate entre profesor y alumno, promoverá la superación, puesto que los estudiantes pueden modificar sus viejas ideas cuando están convencidos de que hay otra que es mejor.

Las estrategias que podrían estar empleando los profesores, para hacer uso de los errores de los estudiantes como fuente de aprendizaje y su posterior superación por oposición a un nuevo conocimiento, dependen del tipo de error que manifieste el alumno. Para ello, es imprescindible conocer la naturaleza de los errores que comenten los estudiantes en cada contenido a ser desarrollado. Al respecto, consideramos conveniente tener en cuenta la recomendación efectuada por Godino, Batanero y Font (2003) cuando expresan que los profesores deberían tener un acercamiento a los errores y dificultades que la investigación didáctica ha documentado sobre cada tema. Es decir, los contenidos de cada unidad didáctica se deberían adaptar, ampliar o variar para tratar la diversidad de errores y dificultades que pueden presentar los alumnos.

Recordemos también que la detección de errores y preconceptos, como parte de las ideas previas del alumno, es el primer paso para la aplicación de un modelo constructivista en la enseñanza de la Matemática. Se puede, por ejemplo, analizar errores como: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ o $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ motivando las siguientes cuestiones: ¿Qué regla alternativa se está aplicando aquí? ¿En qué casos sí podría valer esa regla? ¿Bajo qué condiciones? ¿Por qué la regla es verdadera en algunos casos y falsa en otros? ¿Cómo entonces se puede saber si algo es verdadero o es falso en Matemática?

Estas alternativas para el manejo del error, van más allá de un diagnóstico y emplean el análisis y la reflexión como parte del proceso de construcción de los conceptos matemáticos, como así también, de la comprensión de la naturaleza y métodos propios de la Matemática.

Es cierto que es más fácil aprender conocimientos nuevos que desaprender errores viejos. También debemos reconocer que es mejor explicar el por qué de los errores antes que indicar el modo correcto de hacer las cosas. Pero si estamos interesados en el proceso de aprendizaje de la Matemática, el error puede ser visto como instrumento de identificación de los problemas del currículo o de la metodología de enseñanza, y al analizarlos, podrán ser eliminados y superados. Si, por otro lado queremos explorar el error, éste puede constituirse en un instrumento sumamente interesante para la comprensión de los procesos cognitivos de los alumnos.

BIBLIOGRAFÍA

- BATANERO, Carmen y Otros (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. En *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*. Nº 25, pp. 527 – 547.
- BOOTH, Lesley R. (1984) *Algebra: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. New Windsor, Berkshire, England: NFER-Nelson Publishing Co.
- CURY, Helena Noroña (1994). *As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos*. Tesis de Doctorado en Educación. Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- DI BLASI REGNER, Mario y otros (2003). *Dificultades y Errores: Un estudio de caso*. Actas del II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería (Buenos Aires, Diciembre 2003).
- FRANCHI, Lissette y HERNÁNDEZ, Ana Ismenia (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. En *Educere*. Año 8. Nº 24, pp. 63 – 71.
- GODINO, Juan; BATANERO Carmen y FONT Vicenç (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros*. Universidad de Granada. Distribución en Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>
- GÓMEZ, Pedro (1995). *Profesor: no entiendo – Reflexiones alrededor de una experiencia en docencia de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- GONZÁLEZ, José y otros (1991). *Números Enteros*. Madrid: Síntesis.
- JAIME, Adela; CHAPA, Fernando y GUTIÉRREZ, Ángel (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. En *Epsilon*, Nº 23, pp. 49-62.
- MARTÍNEZ, Gustavo (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 5, Nº 1, pp. 45 – 78.
- RADATZ, Hendrik (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, V. 1, Nº 1, pp. 16 – 20.
- RICO, Luis (1995). *Errores en el aprendizaje de la Matemática*. En Kilpatrick Jeremy, Gómez Pedro y Rico Luis (Editores) *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 69 – 108.

SOCAS ROBAYNA, Martín, y PALAREA MEDINA, María (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. En: *UNO* . Nº 14, pp. 7 – 24.

VILANOVA, Silvia y otros (2001). La Educación Matemática: el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. En *OEI. Revista Iberoamericana de Educación*. Versión digital en <http://www.campus-oei.org/revista/deloslectores.htm>

Contactar

Revista Iberoamericana de Educación

Principal OEI