Sistema de actividades de dinámica no lineal en un curso inicial de Mecánica

System non-linear dynamics activities in an initial course of Mechanics

Pablo Valdés Castro
Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas, Cuba.

Resumen
Un aspecto esencial en la enseñanza de la física es la búsqueda de vías para familiarizar a los estudiantes con temas de actualidad. Uno de esos temas es el de Dinámica No Lineal, de gran interés en múltiples campos de la ciencia y la tecnología. En publicaciones relativas a la enseñanza de la física se han abordado diversas facetas del tema, sin embargo, las actividades a realizar por los propios estudiantes en un curso inicial de física requieren aún elaboración. En este trabajo se describe el sistema de actividades utilizado en el primer año de la carrera de Física Nuclear del Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas de Cuba. Las actividades se han agrupado alrededor de los conceptos de sistema no lineal, espacio de fases, atractor y caos determinista. La calidad de los informes que confeccionan los estudiantes y el interés de ellos confirman la viabilidad de las actividades.

Palabras clave: dinámica no lineal; caos determinista; enseñanza de la Mecánica.

Abstract
An essential aspect in physics education has been the search of ways to get students familiar with current topics. One of those topics is Non-Linear Dynamics, which has great interest in many fields of science and technology. Several facets of it have been considered in publications on physics education; however the activities that students should carry out in an introductory course of physics require further elaboration. This paper describes the system of activities utilized in the first year of Nuclear Physics career at the Higher Institute of Technology and Applied Sciences of Cuba. The activities concern with concepts of non-linear system, phase space, attractor and deterministic chaos. The quality of reports that students prepare and their interest confirm viability of activities.

Keywords: *non-linear dynamics; deterministic chaos; Mechanics teaching.*

Artículo recibido / *Artigo recebido:* 15/06/15; aceptado / *aceite:* 22/09/15
Revista Iberoamericana de Educación / *Revista Ibero-americana de Educação*
vol. 69, núm. 3 (15/11/15), pp. 173-188, ISSN: 1022-6508 / ISSNe: 1681-5653
Organización de Estados Iberoamericanos (OEI/CAEU) / *Organização dos Estados Iberoamericanos* (OEI/CAEU)

1. INTRODUCCIÓN

Dos aspectos constantemente presentes en las investigaciones de didáctica de las ciencias son la búsqueda de vías para la activa participación de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje y la preocupación por relacionarlos con temas de actualidad para la ciencia, la tecnología y la sociedad.

Uno de esos temas es el de Dinámica No Lineal, el cual pese a su gran importancia en la física ha tenido poco reflejo en las colecciones de preguntas y problemas que se proponen a los estudiantes en los cursos tradicionales de Física General. En publicaciones relativas a la enseñanza de la física se han abordado diferentes facetas del tema: exposición de nociones básicas (Alonso y Finn 1995), curso de Dinámica No Lineal (Seoane, Zambrano y Sanjuán, 2008), su origen y futuro (Sanjuán y Casado, 2005), estudio numérico y prácticas de laboratorio con un "péndulo caótico" (DeSerio, 2003; Laws, 2004), análisis de diversos sistemas oscilatorios no lineales (Franco, 2014). Sin embargo, las actividades a realizar por los estudiantes en un curso inicial de física requieren aún elaboración.

En el presente trabajo se describe el sistema de actividades utilizado en el primer año de la carrera de Física Nuclear del Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas de Cuba a fin de relacionar a los alumnos con nociones del tema.

Al preparar su tratamiento se prestó especial atención a tres cuestiones:

- El planteamiento de la *problemática* que se abordará.
- La utilización de la *computadora* como herramienta indispensable para el estudio del tema.
- El diseño del *sistema de actividades* a realizar por los estudiantes.
- En este trabajo se comentan brevemente las dos primeras cuestiones y el énfasis se pone en la última, la cual nos parece de mayor interés en la actualidad.

2. PLANTEAMIENTO DE LA PROBLEMÁTICA

En los cursos iniciales de física habitualmente la mayoría de las situaciones son analizadas empleando modelos una de cuyas características simplificadoras fundamentales es la de ser lineales. La razón principal por la que no suelen considerarse modelos no lineales es la dificultad para resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales que resultan. No obstante, el empleo de la computadora y de métodos numéricos permite abordar el estudio de nociones de Dinámica No Lineal utilizando procedimientos relativamente simples.

El párrafo anterior sintetiza la problemática general a que se enfrentan los alumnos en este tema, pero para que adquieran plena conciencia de ella y de su importancia es necesario comenzar su tratamiento relacionándolos con varios conceptos e ideas clave.

En primer lugar, con los *conceptos de sistema (medio) lineal y no lineal*. Con frecuencia esto se reduce a señalar el tipo de ecuación que describe el comportamiento de los sistemas en cada caso, lineal y no lineal, mientras que se obvia el significado físico del concepto: un sistema (medio) se considera lineal cuando el efecto de cierta acción ejercida sobre él es independiente de su estado, y no lineal en caso contrario. Durante el planteamiento inicial de la problemática es esencial que los estudiantes comprendan este aspecto cualitativo del concepto, el cual puede ser ilustrado analizando el efecto producido por diversas acciones en situaciones bien conocidas, entre ellas: los estiramientos producidos por fuerzas ejercidas sobre un resorte en los casos en que no se sobrepasa su límite de elasticidad (lineal) y en el que se sobrepasa (no lineal), las aceleraciones originadas por fuerzas aplicadas sobre una partícula que se mueve a velocidad no relativista (lineal) y relativista (no lineal), los niveles de sonido que percibimos en presencia de varias fuentes que emiten con determinada intensidad (no lineal).

Otra cuestión que han de entender desde el principio es que, a diferencia de lo que comúnmente piensan, no es la linealidad, sino la no linealidad lo que constituye una *característica universal* de los sistemas. También deben conocer que una de las consecuencias de la no linealidad es que para determinadas condiciones, aun tratándose de sistemas relativamente simples, puede conducir a un *comportamiento caótico*, y que el estudio de dicho comportamiento tiene hoy interés en múltiples campos: desde la mecánica celeste, hasta la economía, pasando por diversas ramas de la tecnología.

Además, es preciso que interpreten el *concepto de Dinámica en su acepción amplia*, ya que comúnmente lo relacionan solo con el movimiento, mientras que su objeto es, en general, el estudio de los cambios que tienen lugar en los sistemas, independientemente de la naturaleza de ellos.

Una discusión introductoria al tema que se apoye en las cuestiones anteriores permite concluir que la Dinámica No Lineal es un vasto campo, que abarca fenómenos muy diversos, incluye a la Teoría del Caos y se vale de una serie de conceptos y herramientas específicos, algunos de los cuales se considerarán durante el estudio del tema. Queda así preparado el camino para profundizar en él.

3. UTILIZACIÓN DE LA COMPUTADORA

El desarrollo de la teoría del caos fue posible gracias al empleo de métodos numéricos mediante computadoras. De ahí que estas ocupen un lugar central en cualquier propuesta de estudio de la Dinámica No Lineal que considere esta teoría, incluso aunque solo se trate de nociones elementales.

En el sistema de actividades que hemos diseñado el estudio del movimiento del péndulo desempeñó un importante papel. Se trata de un sistema físico clásico en cualquier curso de física, cuyo movimiento puede ser caótico para determinada combinación de amortiguamiento, amplitud del torque impulsor y frecuencia de este.

En la enseñanza preuniversitaria el análisis de las oscilaciones del péndulo se limita a las de pequeña amplitud angular, es decir lineales, y al inicio del curso de física en la universidad generalmente ocurre lo mismo, debido fundamentalmente a la dificultad para resolver la ecuación diferencial de su movimiento para grandes amplitudes y a la imposibilidad de expresar su solución analíticamente de modo explícito. La complejidad al estudiar el comportamiento del péndulo aumenta si además de grandes amplitudes se toman en cuenta el amortiguamiento y un torque impulsor.

Ciertamente, en la actualidad hay programas informáticos que simulan desde el movimiento de un péndulo habitual hasta el de un péndulo caótico. No obstante, si bien poseen indudable valor didáctico, adolecen de cierta limitación: los estudiantes trabajan con modelos ya preparados y su actividad se reduce, básicamente, a variar los parámetros del sistema y analizar los resultados, mientras que en la ciencia una parte importantísima de la investigación es la propia construcción del modelo.

En nuestro caso los propios alumnos construyen un modelo numérico del movimiento del péndulo en una hoja de cálculo, y en sucesivas actividades lo van modificando para considerar desde el péndulo habitual hasta uno caótico. Les sirven como antecedentes para ello, el estudio numérico del movimiento de un cuerpo sujeto a un resorte y el del movimiento de un cuerpo en un fluido, abordados en temas anteriores del curso. En estos casos para calcular la velocidad y la aceleración en los pequeños intervalos en que se divide el intervalo total de tiempo los estudiantes emplean desarrollos de Taylor, respectivamente hasta la primera y segunda derivada. Esto conecta con el curso de Análisis Matemático que paralelamente reciben y, por otra parte, desde el punto de vista físico equivale a utilizar en cada uno de los pequeños intervalos las ecuaciones bien conocidas por ellos para el movimiento con aceleración constante, lo cual representa una ventaja. No obstante, en un estudio relativamente amplio del movimiento de un péndulo resulta imposible emplear semejante procedimiento, ya que con cada iteración el error del método se acumula y puede dar lugar a soluciones inestables, inclusive para tiempos relativamente cortos.

Por eso, para resolver la ecuación diferencial empleamos una modificación del método de Euler (Cromer, 1981), que aunque comúnmente no es considerada en los libros sobre métodos numéricos, resulta simple y conduce a buenos resultados. El algoritmo es el siguiente:

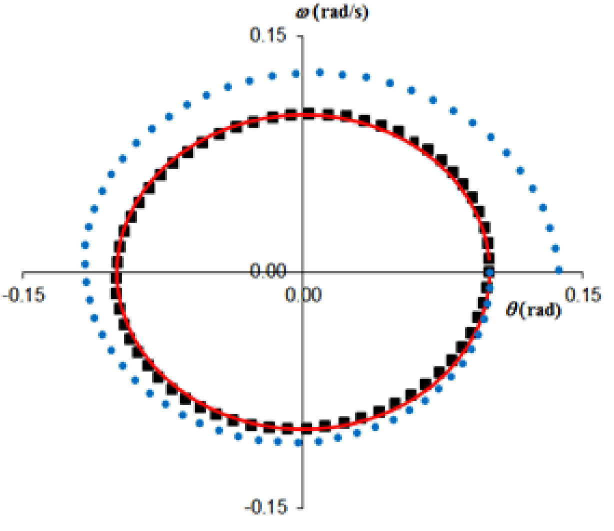
$$\omega(t_{i+1})=\omega(t_i)+\alpha(t_i)\Delta t$$
$$\theta(t_{i+1})=\theta(t_i)+\omega(t_{i+1})\Delta t$$

En estas ecuaciones ω, θ y α son, respectivamente, la velocidad, posición y aceleración angulares del péndulo y $\Delta t=t_{i+1}-t_i$, el tamaño de los pequeños intervalos de tiempo en que se divide el intervalo total. La modificación al método de Euler consiste en calcular las posiciones empleando los valores de las velocidades al final de los pequeños intervalos de tiempo y no al inicio de ellos. Tanto en el método de Euler como en su modificación, al calcular las velocidades se asume que la aceleración es constante en cada uno de los intervalos, y al calcular las posiciones que lo es la velocidad, lo que en ambos casos conduce a error en los resultados. Pero mientras que en el método de Euler los errores al calcular las velocidades y posiciones se acumulan sucesivamente, con la modificación mencionada en alguna medida se compensan y los resultados son mucho mejores, lo cual se ilustra a continuación en dos casos.

El gráfico $\omega(\theta)$ de la figura 1 corresponde a un péndulo que oscila libremente con pequeña amplitud y período 2π s. Al emplear el método de Euler (circulitos azules) la diferencia de los resultados respecto a los exactos, obtenidos mediante la solución analítica (línea continua roja), crece con cada iteración y cuando concluye el ciclo puede ser muy notable. En cambio, con la modificación al método de Euler (cuadraditos negros) los resultados alcanzan su máxima desviación al cabo de un octavo de ciclo, pero luego vuelven a aproximarse a los exactos al concluir un cuarto de ciclo. El paso utilizado para las soluciones numéricas fue de 0.1 s, que comparado con el período de las oscilaciones no es demasiado pequeño, sin embargo puede apreciarse que pese a ello los resultados con el método de Euler modificado se aproximan bastante a los de la solución analítica.

FIGURA 1

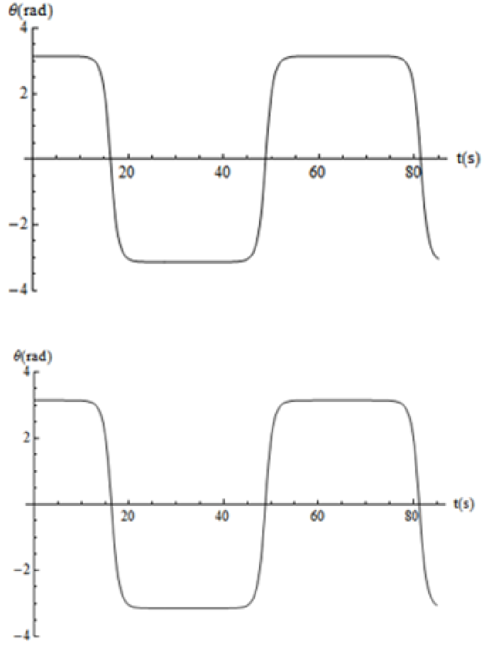
Gráfico de $\omega(\theta)$ para las oscilaciones pequeñas de un péndulo ($T = 2\pi$ s; $\theta(0) = 0.1$ rad; $\omega(0)=0$ rad/s). Soluciones mediante el método de Euler (circulitos azules), con el método de Euler modificado (cuadraditos negros) y analítica (línea continua roja). El paso utilizado para las soluciones numéricas fue 0.1 s.



El segundo caso corresponde a las oscilaciones de gran amplitud. Si se utiliza el método de Euler, e incluso un desarrollo de Taylor hasta la segunda derivada, aun utilizando un paso relativamente pequeño resulta difícil explorar el movimiento para amplitudes próximas a ϖ rad. Por ejemplo, para las condiciones iniciales $\theta(0)=2.91$ rad y $\omega(0)=0$ rad/s, si se emplea el método de Euler para el cálculo de la velocidad, un desarrollo de Taylor hasta la segunda derivada para el cálculo de la posición y un paso de 0.01 s, al concluir el primer ciclo el resultado es ya inaceptable: el péndulo sobrepasa la posición de máxima elevación en lugar de invertir el sentido de su movimiento. En cambio mediante la modificación indicada al método Euler, aún para una posición inicial tan próxima a la de equilibrio inestable como $\theta(0)= 3.141592$ rad (¡π con seis cifras decimales!), el péndulo retorna hacia la posición de equilibrio. Por otra parte, los gráficos de $\theta(t)$ (Fig. 2) obtenidos al aplicar el método descrito (gráfico superior) y al utilizar un software profesional con el cual se garantizó elevada exactitud del procedimiento numérico empleado (gráfico inferior) muestran una excelente coincidencia en los resultados.

FIGURA 2

Gráficos de $\theta(t)$ para las oscilaciones del péndulo con condiciones iniciales $\theta(0)= 3.141592$ rad, $\omega(\theta)$. El gráfico superior corresponde a la solución mediante el método de Euler modificado y una hoja de cálculo y el inferior a la solución numérica empleando el software *Mathematica*.



4. SISTEMA DE ACTIVIDADES A REALIZAR POR LOS ESTUDIANTES

Como hemos mencionado, una idea que se reitera en las investigaciones de didáctica de las ciencias es la necesidad de una activa participación de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Y el modo más efectivo de poner en práctica dicha idea es por medio de un sistema de actividades convenientemente diseñado que los estudiantes realicen bajo la dirección del profesor.

Las actividades propuestas a los estudiantes se agruparon atendiendo a los siguientes conceptos: sistemas lineales y no lineales, espacio de fases, atractor y caos determinista. A continuación presentamos un resumen de ellas, limitándonos a aquellas de mayor interés.

4.1 SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES

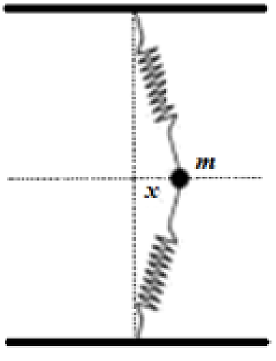
Estudio numérico de un oscilador lineal (cuerpo-resorte). El objetivo principal de esta actividad es que los estudiantes se relacionen con la modificación del método de Euler, su implementación en una hoja de cálculo y se convenzan de su funcionalidad, al tiempo que repasan cuestiones ya conocidas por ellos. Mediante gráficos de $x(t)$ y $v(t)$ contrastan los resultados que se obtienen para diferentes valores de los parámetros del sistema cuerpo-resorte y de las condiciones iniciales, empleando: a) el método de Euler, b) su modificación y d) la solución analítica.

Estudio numérico de las oscilaciones de un péndulo (lineal y no lineal). Modifican el programa elaborado en la actividad anterior, a fin de estudiar las oscilaciones de un péndulo para pequeñas y grandes amplitudes. Particular interés tiene ensayar con el modelo para amplitudes muy grandes. Los gráficos muestran que $\theta(t)$ y $\omega(t)$ no son sinusoidales y que el período es mayor que el de las oscilaciones de pequeña amplitud. Un ejemplo muy claro es el gráfico de la figura 2, para oscilaciones de amplitud 3.141592 rad. Del gráfico puede apreciarse que en este caso el período de las oscilaciones es alrededor de 65 s, es decir más de diez veces mayor que el de las oscilaciones de pequeña amplitud (2π s).

Una creencia errónea muy común entre los estudiantes (propiciada por el tipo de situaciones que habitualmente se analizan en los cursos iniciales de física) es que siempre que las oscilaciones sean de pequeña amplitud, el sistema puede ser considerado lineal y, por tanto, las oscilaciones armónicas simples. El propósito principal de las siguientes actividades es contribuir a superar esa creencia.

Oscilaciones pequeñas, transversales, de un cuerpo entre dos resortes. La figura 3 representa un pequeño cuerpo, visto desde arriba, situado en un plano horizontal entre dos resortes y con un pequeño desplazamiento lateral x. Se consideran dos situaciones: una en que con el cuerpo en la posición de equilibrio los resortes están estirados y otra en que no lo están. Los estudiantes encuentran la expresión analítica de la fuerza neta $F(x)$que actúa sobre el cuerpo en cada uno de las dos situaciones. En la primera es del tipo $F = -C_1 x$ y en la segunda $F = -C_2 x^3$, donde C_1 y C_2 son constantes positivas. De este modo, si bien en ambos casos se trata de oscilaciones de pequeña amplitud, en el primero el sistema puede considerarse lineal mientras que en el segundo no.

FIGURA 3
Cuerpo de masa *m* situado en un plano horizontal entre dos resortes, con un pequeño desplazamiento lateral *x*.



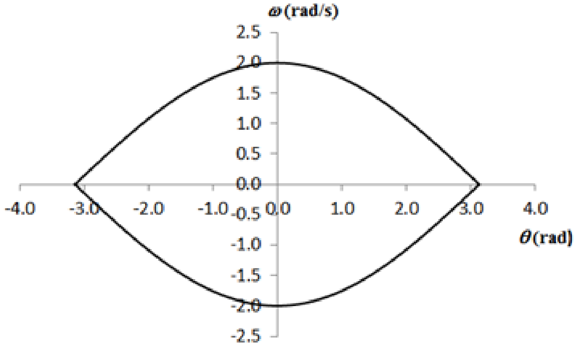
Pelota que se deja caer sobre una superficie horizontal y rebota elástica y sucesivamente. Este es uno de los casos más comunes y simples de oscilaciones no lineales que, además, como la segunda de las situaciones de la actividad anterior, no es lineal aunque las oscilaciones sean de pequeña amplitud. Los estudiantes determinan el período de las oscilaciones, trazan los gráficos de $y(t)$ y $v(t)$ constatan que, a diferencia de los casos lineales, las oscilaciones no son sinusoidales y el período depende de la amplitud.

4.2 ESPACIO DE FASES

Nuestros estudiantes no se han relacionado anteriormente con el concepto de espacio de fases. Sirve como cierto antecedente para su introducción, el conocimiento que tienen desde la enseñanza preuniversitaria de la "ecuación de estado" del gas ideal y de los gráficos correspondientes a las "leyes de los gases", los cuales expresan relaciones entre las magnitudes de estado (*p*, *V*, *T*). Esto es aprovechado para introducir el concepto de espacio de fases como el espacio cuyos puntos caracterizan el estado de una partícula o sistema. Para el movimiento de una partícula en línea recta y las oscilaciones de un péndulo, dichos espacios son los planos $v-x$ y $\omega-\theta$, respectivamente. Luego se argumenta la importancia que para la Dinámica No Lineal tienen los gráficos en el espacio de fases: complementan la descripción brindada por los gráficos con los que ya están familiarizados ($x(t)$ y $v(t)$); en estudios prolongados de los fenómenos pueden resultar más compactos; pero sobre todo, revelan ciertas regularidades características del comportamiento de los sistemas no lineales.

Construcción de gráficos en el espacio de fases. A fin de que se relacionen con la construcción e interpretación de este tipo de gráfico, se consideran algunas de las situaciones ya examinadas en actividades anteriores, en particular construyen e interpretan los gráficos en el espacio de fases de: a) las oscilaciones del sistema cuerpo-resorte, b) el movimiento de la pelota que rebota elásticamente en una superficie horizontal, c) las oscilaciones de pequeña y gran amplitud del péndulo. La figura 4 muestra uno de estos gráficos, el correspondiente a un péndulo que oscila con amplitud muy grande.

Figura 4
Gráfico en el espacio de fases correspondiente a un péndulo que oscila con amplitud 3.141592 rad (π con seis cifras decimales).



4.3 *ATRACTOR*

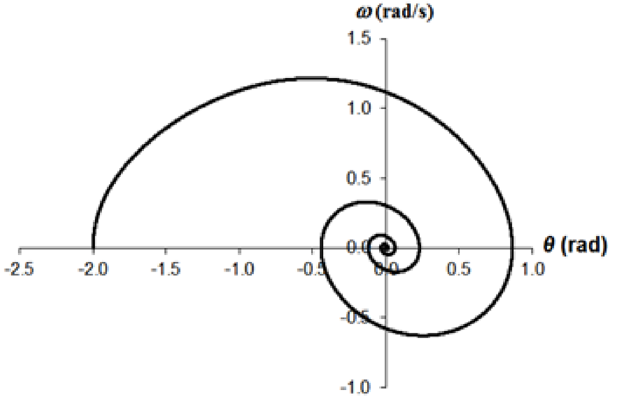
Las actividades de este grupo están dirigidas, principalmente, a que los estudiantes se relacionen con los atractores de punto fijo, periódico o de ciclo límite, y aperiódico o extraño. Si bien el sistema concreto considerado es el péndulo, debe subrayarse que esos tres tipos de atractores también caracterizan el comportamiento de otros muchos sistemas, de diversa naturaleza.

Cabe señalar que el modelo numérico preparado a partir de la modificación al método de Euler puede servir, además, para analizar los fenómenos de resonancia y batimiento y los movimientos subamortiguado y sobreamortiguado del péndulo.

Atractor de punto fijo. Los estudiantes obtienen la trayectoria en el espacio de fases correspondiente a un péndulo amortiguado (Fig. 5) y observan que para variadas condiciones iniciales y coeficientes de amortiguamiento la trayectoria tiende siempre a un mismo punto (0, 0).

FIGURA 5

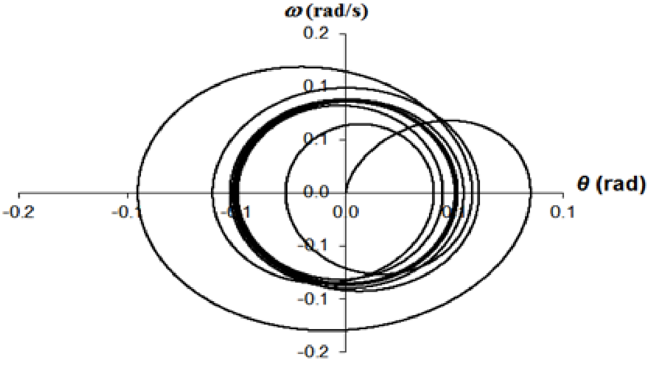
Péndulo con amortiguamiento. La trayectoria en el espacio de fases tiende a un punto, cualesquiera que sean las condiciones iniciales.



Atractor periódico en un oscilador lineal. Consideran un oscilador lineal con amortiguamiento e impulsado. Exploran las más variadas condiciones iniciales y concluyen que, luego de un período transitorio más o menos largo, en todos los casos las trayectorias en el espacio de fases tienden a una misma trayectoria límite (Fig. 6). Introduciendo como condiciones iniciales valores de t, θ y ω correspondientes a un instante en que ya se ha rebasado el período transitorio obtienen la trayectoria límite "limpia".

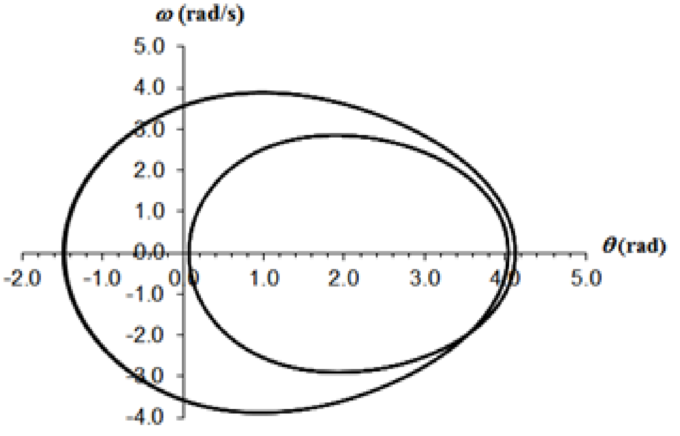
FIGURA 6

Péndulo lineal, amortiguado e impulsado. La trayectoria en el espacio de fases tiende a una trayectoria límite que, para parámetros fijos del péndulo, es la misma cualesquiera que sean las condiciones iniciales.



Múltiples atractores periódicos en el oscilador no lineal. Exploran las oscilaciones de gran amplitud de un péndulo y aprecian un nuevo comportamiento, debido a la no linealidad: la existencia de determinado atractor para cierto conjunto de condiciones iniciales y de otros atractores para otros conjuntos de condiciones iniciales; la ruptura de simetría del movimiento del péndulo respecto a sus posiciones de equilibrio estable e inestable; la duplicación del período de los atractores. La figura 7 ilustra este último caso, las condiciones iniciales se escogieron de tal modo que se aprecia la trayectoria límite "limpia", sin el período transitorio.

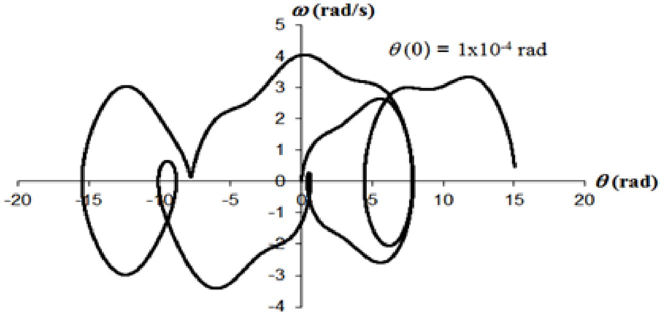
FIGURA 7
Duplicación del período. El período del péndulo es doble que el del torque impulsor.



4.4 ***CAOS DETERMINISTA***.

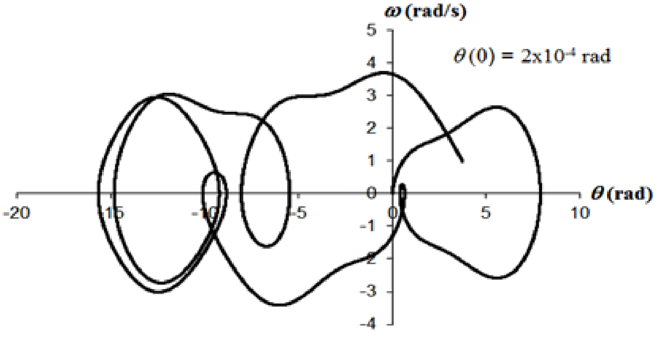
Atractor aperiódico o extraño. En el modelo numérico de la actividad anterior los estudiantes introducen valores de los parámetros y de las condiciones iniciales (proporcionados por el profesor) de modo que el péndulo se mueva en régimen caótico, y observan una trayectoria irregular en el espacio de fases (Fig. 8). Sin embargo, es preciso puntualizar que la irregularidad de la trayectoria no permite afirmar que el sistema se encuentra en régimen caótico. Pudiera tratarse de un atractor periódico de muy largo período o, simplemente, de una etapa transitoria hacia el régimen caótico. Confirmar la presencia de caos puede resultar una difícil tarea.

FIGURA 8
Trayectoria en el espacio de fases correspondiente al atractor aperiódico de un péndulo



Sensibilidad fuerte a las condiciones iniciales. Varían ligeramente las condiciones iniciales del movimiento y nuevamente observan la trayectoria en el espacio de fases. Así, por ejemplo, la trayectoria de la figura 8 corresponde a las condiciones iniciales $\theta(0)=1\times10^{-4}$ rad, $\omega(0)=0$ rad/s, mientras que la de figura 9 a $\theta(0)= 2\times10^{-4}$ rad, $\omega(0)=0$ rad/s. Los estudiantes aprecian que si bien al inicio las trayectorias coinciden, luego de cierto tiempo difieren grandemente. Esto los relaciona con el sello distintivo del comportamiento caótico: la "sensibilidad fuerte a las condiciones iniciales".

FIGURA 9
Trayectoria en el espacio de fases para condiciones iniciales ligeramente diferentes al caso de la figura 8.



Las dos últimas actividades descritas son aprovechadas para discutir aspectos esenciales como los siguientes. Con condiciones iniciales y parámetros dados, la ley que rige el comportamiento del sistema, plasmada en la ecuación diferencial, conduce a un resultado único, determinado, de ahí el calificativo de *determinista* para el comportamiento del sistema. Por otra parte, pequeñas diferencias en las condiciones iniciales conducen, al cabo de cierto tiempo, a distintas trayectorias en el espacio de fases, lo que da lugar a catalogar el comportamiento de *caótico*. Tal sensibilidad a las condiciones iniciales, conjuntamente con el hecho de que es imposible determinarlas con absoluta exactitud, trae como consecuencia que la predictibilidad del movimiento sea limitada.

5. CONCLUSIONES

El tema Nociones de Dinámica No Lineal ha sido desarrollado durante cinco años en el curso inicial de Mecánica en la carrera de Física Nuclear del Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas de Cuba. Luego de tratar en clase conceptos e ideas clave y el método numérico que se empleará, se orienta a los estudiantes el sistema de actividades a realizar. Durante varias semanas trabajan de modo independiente, con el asesoramiento del profesor. El estudio del tema culmina con la realización de un seminario en el que los estudiantes discuten los resultados de las actividades que han realizado y se precisan los conceptos básicos.

Los informes que preparan los estudiantes y la activa participación en el seminario, evidencian el interés que el tema y las actividades planteadas suscitan en ellos: todos realizan las actividades, unos con determinada ayuda y otros apenas sin ella, y muchos por iniciativa propia indagan y profundizan acerca de diversos aspectos.

El tratamiento de nociones de Dinámica No Lineal descrito relaciona a los estudiantes con asuntos de actualidad, contribuye a desarrollar importantes habilidades generales y profundiza las relaciones interdisciplinarias entre Física, Matemática, Computación y Filosofía.

BIBLIOGRAFÍA

ALONSO, M. y FINN E. (1995): *Física*. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A. Delaware.

CROMER, A. (1981): "Stable solutions using the Euler approximation", en *Am. J. Phys.*, 49, 455-459.

DESERIO, R. (2003): "Chaotic pendulum: The complete attractor", en *Am. J. Phys.*, 71, 250-257.

FRANCO, A. *Curso Interactivo de Física en Internet*, <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones>, [Consulta: julio 2014].

LAWS, P. (2004): "A unit on oscillations determinism and chaos for introductory physics students", en *Am. J. Phys.*, 72, 446-452.

SANJUÁN, M. y CASADO, J. (2005): "Dinámica No Lineal: Orígenes y Futuro", en *Revista Iberoamericana de Física*, Enero, 23-31.

SEOANE, J., ZAMBRANO, S. y SANJUÁN, M. (2008): "Teaching Nonlinear Dynamics and Chaos for Beginners", en *Lat. Am. J. Phys*. *Educ*. 2, 205-211.