O conceito de Medidas de Superfície – na abordagem histórico-cultural e nos registros de representação

CÁTIA MARIA NEHRING
MARTA CRISTINA CEZAR POZZOBON
ISABEL KOLTERMANN BATTISTI
Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul/Brasil.

1. Introdução

Em Matemática toda a comunicação se estabelece com base em representações, pois os objetos matemáticos não são percebidos ou observados por meio de instrumentos. Fazem-se necessários sistemas de representação, que constituem a forma de referir-se a estes objetos, o que conduz a uma diferenciação entre o objeto matemático e a sua representação. O objeto matemático não é acessível pela percepção. Precisa de representações semióticas para a sua apreensão, ou seja, trata-se de representações semióticas que permitem o acesso aos objetos matemáticos (conceitos, propriedades, estruturas, relações). As representações possibilitam a comunicação de ideias matemáticas, entre as pessoas e as atividades cognitivas do pensamento, desencadeadas pela linguagem.

No contexto escolar, muitas vezes, pode ocorrer um tensionamento entre as várias linguagens adquiridas pelo uso e pela diversidade cultural, as quais possibilitam a produção de diferentes sentidos, não só entre docente e alunos, mas também entre os próprios alunos. A significação de cada enunciado é determinada na interação com as múltiplas vozes, seja perguntando, respondendo, repetindo, discordando, na busca da validação de argumentos. Pelo viés da abordagem histórico-cultural, o aluno e o docente são vistos como participantes de um processo coletivo de elaboração (construção e reconstrução) de saberes, pela interlocução, que é sustentado pelo diálogo entre os sujeitos (Vigotski, 2001). Este diálogo, estruturador da comunicação acerca de um objeto matemático, acontece a partir de um sistema semiótico, que exige a referência aos signos, que são a base das atividades cognitivas desta área de saber (Duval, 2003). O processo de mediação conceitual se efetiva nas relações de diálogo e exige a identificação e a apreensão de registros de representação.

Com este recorte teórico, a intencionalidade é o entendimento e a explicitação de um processo de mediação entre linguagem e elaboração conceitual. Analisa-se o processo de elaboração conceitual – significados e sentidos – produzidos na/pela palavra e pelos registros de representações do objeto matemático. No movimento de instrução matemática, articulado por intervenções e ações docentes e discentes a partir dos aspectos epistêmico, cognitivo, mediacional, interacional, afetivo e ecológico (Godino; Font; Wilhelm; Castro, 2009) é possível o entendimento da linguagem matemática como estruturadora de generalizações e abstrações efetivadas através dos registros de representação no processo de elaboração conceitual.

Revista Iberoamericana de Educación ***/ Revista Ibero-americana de Educação***
ISSN: 1681-5653
n.º 54/2 – 10/11/10
Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI)
Organização dos Estados Iberoa-americanos para a Educação, a Ciência e a Cultura (OEI)

A pesquisa aqui apresentada recorre à empiria desenvolvida em Battisti (2007)[1] e a um projeto institucional de pesquisa, que aborda os registros de representação em Nehring e Pozzobon (2008)[2]. O procedimento metodológico para o desenvolvimento desta pesquisa baseia-se nas narrativas de uma sala de aula de matemática – a vivência de uma professora da Educação Básica, na qual as aulas de matemática foram vídeo-gravadas e transcritas. Estas transcrições são analisadas pelas pesquisadoras, levando em consideração o movimento e a articulação entre o material empírico e as ferramentas teóricas, desencadeando recortes, que foram denominados de episódio (quadra de esportes). A narrativa é articulada pela descrição das situações de ensino, pelos encaminhamentos da docente, pelos diálogos entre docente e alunos, entre alunos e alunos e pelo olhar das pesquisadoras como narradoras da aula, a partir da transcrição da vídeo-gravação. Além disso, foi tomado como instrumento de análise o caderno de um aluno com registros da atividade – episódio da quadra de esportes e outros encaminhamentos docentes, que não estão relatados na íntegra neste texto, porém, fazem parte do material empírico da pesquisa.

O material empírico da pesquisa é resultante da ação de uma docente de escola pública, com uma 5ª série (6º ano do Ensino Fundamental de 9 anos) do interior do Estado do Rio Grande do Sul – Brasil. As aulas vídeo-gravadas exploraram o conceito de Medidas de Superfície, pois a organização curricular desta turma estrutura-se ancorada no conceito de Medidas, desencadeando Sistemas e Unidades de Medida. Destaca-se que as aulas ocorreram em diferentes espaços da escola, articulados em momentos orientandos pela docente, em momentos de autonomia dos alunos e em momentos de interação e negociação entre docente e alunos, organizados no coletivo – pequenos grupos de alunos e individualmente.

Aulas de Matemática – o episódio da quadra de esportes

Neste episódio, a docente leva a turma para um passeio no pátio da escola. Este passeio tem a intencionalidade de possibilitar que os alunos observem a quadra de esportes que está em reforma. Esta observação desencadeia diversos diálogos, conforme se observa no recorte abaixo:

> *... Profª: O que está faltando para terminar,... para a quadra ficar de uma forma adequada para o uso?*
> *M1: Tinta.*
> *S1: Linha...*
> *Profª: Antes das linhas serem pintadas, pensem junto comigo.*
> *M1: Eu sei. Falta tinta.*
> *F2: Pintar.*
> *E1: Um fundo. ...*
> *Profª: Eu acho que vocês estão falando a mesma coisa, não é? O M1 falou tinta, a colega ali falou que falta um fundo, esse fundo que você está dizendo é uma pintura E1?*
> *E1: É.*
> *Profª: Pintar. ... Pintar o quê?*
> *F1: A quadra, o fundo da quadra.*

[1] A pesquisa tem por centralidade o processo de apropriação, por parte dos alunos, de significações historicamente produzidas pela humanidade do conceito de superfície. Os entendimentos e as compreensões da referida pesquisa constituíram-se numa perspectiva histórico-cultural, mediante a análise microgenética de aulas de Matemática de uma turma de 5ª série, uma escola pública estadual, com foco no estudo de Medida de Superfície.

[2] O projeto de pesquisa é desenvolvido na UNIJUÍ – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, com foco na discussão curricular de conceitos matemáticos e na formação do professor.

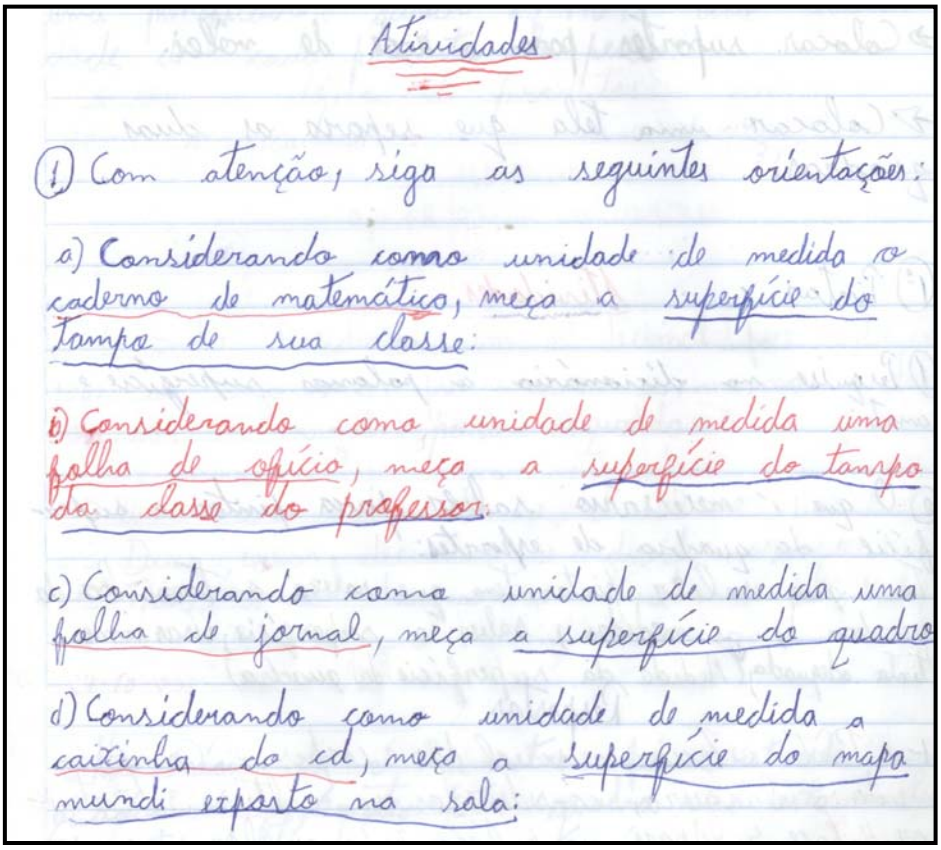
Profª: .... Então vamos ver. O F1 falou que falta uma pintura. ... Nós já estudamos a medida do contorno, a gente já viu a largura, alturas, comprimentos... Mas agora é passar a tinta, é pintar onde? O contorno da quadra?
M1: O fundo da quadra.
S1: As linhas.
Profª: As linhas... já foi falado, a gente já comentou.
F2: Completa.
A1: As laterais.
A2: A linha de fundo.
Profª: Sobre as linhas que vocês estão repetindo... Se antes de colocar as linhas, a pintura dessas linhas... teria mais alguma coisa a ser feita? Aí os colegas disseram que teria que passar uma tinta. Aí a gente viu onde, um colega falou um fundo.
G1: Completa.
Profª: O G1 disse uma coisa... quero a atenção de todos. G1, o que você quer dizer com quadra completa.
G1: Toda ela.
Profª: É isso que você disse L1? O que você falou antes?
L1: Pinta toda ela.
Profª: ...Quando a gente fala pintar toda ela, está falando o quê?... A última fala dos colegas foi relacionada a pintar a quadra toda, será que tem uma palavra, uma forma de dizer a quadra toda. Não é o contorno, não é um lado, é a quadra toda. Certo?
E1: É pintar a quadra total.
Profª: Pintar a quadra total... Então tenta explicar.
E1: Primeiro tu pinta o fundo de qualquer cor e depois passa só as linhas por cima, daí como vai ver assim, como são as linhas...
Profª: Desenhar as quadras?
E1: As cores das linhas são diferentes, só o fundo é da mesma cor.
A1: A de vôlei é diferente da de futsal.
Profª: O fundo... quero conversar um pouquinho melhor. ...
V1: Profe eles estão falando dessa parte aqui (Passa as mãos sobre o tampo da mesa de uma classe). Se essa mesa fosse a quadra deve pintar essa parte aqui, toda a quadra. (Mostra novamente com as mãos.)
Profª: É esse fundo que vocês estão dizendo. Olhem 'pra cá. Aqui nessa mesa que o V1 nos mostrou. (Uma classe) Digamos que aqui é a quadra. 'Tá M1? Até agora a gente trabalhou com medidas de comprimentos, medimos larguras, aprendemos a medir contornos, espessuras, etc. Agora a gente está falando de uma coisa diferente que o V1 veio aqui e nos mostrou. Esse espaço aqui. Ó, G1. Vocês acabaram de dizer que tem que pintar a quadra toda. Então é todo o espaço que forma a quadra. Esse espaço aqui, isto, V1? 'Tá, R1? E esse espaço aqui (mostra novamente com as mãos), assim como a quadra, é plano. Tem um limite. (Mostra com as mãos) E tem duas dimensões. É diferente do que já estudamos até então quando a gente considerava apenas uma dimensão. Tem uma dimensão 'pra cá e outra 'pra lá (mostrando com as mãos) é assim bi-dimensional, tem duas dimensões. Cuidem bem estas características deste espaço que estamos vendo.
L1: É plano.
V1: É limitado porque ele termina?
Profª: É, V1, é limitado, porque tem um limite, termina.
R1: Como é isto de duas dimensões?
E1: Não vê que tem comprimento e também largura?
M1: Quando a gente media comprimento era só comprimento, não interessava a largura.
Profª: Um espaço assim, plano, limitado e bi-dimensional podemos chamar de superfície.
A1: Superfície?
Profª: Superfície. Estamos vendo então isso aqui, ó, ó (Mostrando com as mãos), a superfície da quadra.
Profª: Isso é uma das coisas que está faltando pintar, é uma das coisas que está faltando nessa quadra. ...

A docente continua a exploração da atividade, em sala de aula, propondo questões referentes à representação da quadra, considerando um plano. Para isso, o foco é a exploração do registro figural, trazendo a discussão de plano como uma região delimitada por segmentos de reta. Isso é articulado através dos diálogos já estabelecidos durante a observação e retomados com outros encaminhamentos e olhares, na perspectiva dos alunos explicitarem os sentidos, encaminhando possibilidades de significação para a representação de um plano.

Caderno de um aluno – registros

Após a discussão de representação do plano, os alunos, a partir de uma unidade de medida determinada, são desafiados a medir a superfície[3] de uma das faces de um objeto, como mostra a Figura 1. Para que a atividade seja desenvolvida (lembramos que são quase 30 alunos em uma única sala), atendendo aos objetivos implícitos no planejamento, a docente, juntamente com os alunos, escolhe a unidade de medida, considerando a quantidade de vezes que esta cabe na superfície a ser medida, observando: sua praticidade, comodidade e economia. Na figura 1, expõe-se o registro do caderno de um aluno, que mostra a sequência didática proposta pela docente.

Figura 1
Recorte do caderno do Aluno, o qual apresenta a atividade proposta pela docente


Atividades

1) Com atenção, siga as seguintes orientações:

a) Considerando como unidade de medida o caderno de matemático, meça a superfície do Tampo de sua classe:

b) Considerando como unidade de medida uma folha de ofício, meça a superfície do tampo da classe do professor:

c) Considerando como unidade de medida uma folha de jornal, meça a superfície do quadro

d) Considerando como unidade de medida a caixinha do cd, meça a superfície do mapa mundi exposto na sala:

A comparação da unidade de medida com a superfície do objeto a ser medido é uma operação "basicamente concreta", mas a esta ação está implícita uma série de procedimentos que influenciam na

[3] Deve-se considerar que os objetos usados são tridimensionais. Porém, nesta atividade será enfocando somente a maior face de cada um deles, pois o objetivo é trabalhar com as superfícies.

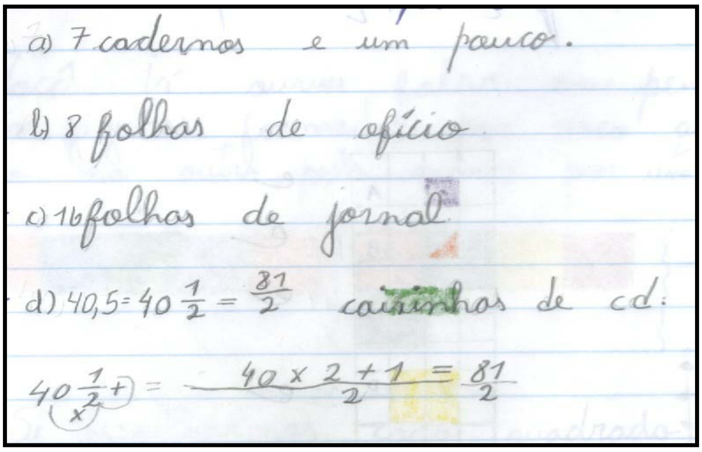
operacionalização do conceito, necessitando da mediação da docente. Nesta mediação, destaca-se alguns questionamentos propostos pela docente: Como distribuir a unidade na superfície a ser medida? Qual a melhor forma, no sentido de ser a mais adequada e mais prática? Como marcar na superfície que estava sendo medida, por exemplo, no quadro pode-se usar o giz, na classe pode ser usado um lápis, mas e no mapa, considerando que este não pode ser danificado? Tais questionamentos permeiam todo o processo de elaboração conceitual, que podem ser delineados a partir da interação entre os componentes de cada grupo e a intencionalidade docente.

Pontua-se que a operacionalização da atividade acontece de forma diversificada pelos grupos de alunos da turma pesquisada. Alguns grupos distribuem a unidade sobre toda a superfície. Um deles, ao medir a mesa da docente, considerando como unidade de medida uma folha de ofício e ao medir o quadro, uma folha de jornal, faz a demarcação, seguindo apenas o comprimento e a largura e depois "faz as operações necessárias"[4]. Fazer as operações é realizar o cálculo da área da superfície em questão, pois a ideia de área está subentendida nesta atividade em diferentes níveis, desenvolvida no pensamento e nas ações dos alunos.

Nesse sentido, a operacionalização da atividade é um processo concreto, envolvendo materiais manipulativos, possibilitando o encaminhamento para outra etapa de cunho teórico, em que a representação da medida encontrada, precisa ser expressa numericamente. Trata-se de um momento que requer a supremacia do objeto matemático sobre os demais aspectos que envolvem a atividade, ou seja, a utilização e a significação de registros de representação.

Nas medições realizadas pelos alunos, a expressão numérica da medida nem sempre foi um número inteiro. A primeira medida encontrada, como mostra a Figura 2, foi sete cadernos e um *pouco*. Este *pouco* não foi definido numericamente pelo aluno. Na segunda e na terceira questão foram encontrados como medida números inteiros, oito cadernos para a letra *b* e dezesseis folhas de jornais para a letra *c*. Já na quarta questão, na qual foi usada como unidade uma caixinha de CD para medir a superfície de um mapa, o aluno encontrou quarenta caixinhas e meia.

Figura 2
Recorte do caderno de um aluno, que mostra as respostas da atividade desenvolvida.



[4] Multiplicam o número que expressa a medida da largura pelo número que expressa a medida do comprimento da referida superfície.

Tendo em vista que os alunos já estavam familiarizados com a representação dos números racionais, registro fracionário e decimal, a medida da questão apresentada na letra *d* da atividade foi expressa numericamente considerando tais registros. Primeiramente através do registro decimal e, depois, através do registro de número misto.

Na sequência, traz-se um recorte de aula das vídeo-gravações, contado pelas pesquisadoras. A pedido da docente, um aluno foi ao quadro e transformou o registro de número misto em registro fracionário. Outro aluno, considerando o registro da fração encontrada pelo colega, efetuou a divisão do numerador pelo denominador, encontrando o registro decimal indicado anteriormente pelos colegas. Todo este movimento indica a atividade de tratamento e conversão[5] estabelecida pelos alunos, no registro decimal e fracionário dos números racionais.

A exploração desta questão (letra *d*) possibilita aos alunos a percepção de diferentes representações para os números racionais, oportunizando a modificação dos níveis de generalização dos conceitos, os quais, explícita ou implicitamente, nela estão contemplados. Esta percepção pressupõe que o docente entenda os conceitos ensinados em suas representações parciais e, principalmente, nas relações conceituais às quais estão envolvidos cada um dos registros de representação. A representação da medida foi expressa, primeiramente, de maneira oral pelos alunos (registro da língua materna), depois, pela escrita: quarenta caixinhas e meia (registro numérico com base na língua materna); e, posteriormente, o registro 40,5 (registro decimal, linguagem matemática).

O registro decimal é constantemente mencionado e utilizado em diferentes situações cotidianas, faz parte da vivência do aluno, o que já não acontece com tanta intensidade com os registros fracionários. Assim, o registro decimal possui um custo cognitivo menor para o aluno, pois está presente em seu pensamento. Porém, cabe destacar que a sua representação formal exige a intervenção do docente, visando a elaboração conceitual. O registro do número misto, para este grupo de alunos, mostrou ser mais significativo do que o registro fracionário que representa esta medida, talvez porque, apesar de seu tratamento ser diferente, sua leitura possui alguns aspectos semelhantes aos do registro decimal. Quando da divisão entre o numerador e o denominador do registro fracionário (81/2), o resultado foi indicado por muitos alunos, porém no momento da realização do algoritmo da divisão, houve algumas dificuldades, alguns inclusive diziam que o cálculo não dava certo. O "não dar certo" significava que na divisão havia uma sobra, um resto, se considerado apenas o conjunto dos números inteiros. Esta dificuldade indica ao docente o quanto o conceito do número racional tem significado para os alunos, exigindo muitas outras ações, explorando o uso dos registros fracionários e decimais para a elaboração conceitual.

[5] Duval (2003, p. 15) apresenta em sua teoria que são necessárias duas atividades para o processo de apreensão dos objetos matemáticos. O **Tratamento** – Permanecendo no mesmo sistema. Quase sempre é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista "pedagógico", tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender. E a **Conversão** – mudando de sistema, mas conservando a referência ao objeto -, este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não-congruência. Isso se traduz pelo fato de os *alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes.* A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

2. O Conceito de Medidas de Superfície e a Elaboração Conceitual

Ensina-se o conceito de Medidas de Superfície na Educação Básica com ênfase no ensino da geometria, voltada para figuras geométricas e para as suas medidas, destacando o perímetro e a área das figuras planas. Percebe-se que há alguns equívocos em relação ao entendimento do objeto de ensino e, principalmente, à complexidade que envolvem os aspectos cognitivos para a aprendizagem de conceitos geométricos (Almouloud e Mello, 2000). Diante disso, considera-se, de acordo com Duval (1995), que, para a apreensão conceitual, é necessário sistemas de expressão e de representação que precisem de registros de representações semióticas, além da língua materna e das imagens. Destaca-se três formas de processos cognitivos que envolvem a geometria: a *visualização,* que considera o espaço, a *construção* de modelos e o *raciocínio,* que considera o processo discursivo para ampliação, prova e explicação do conhecimento (Almouloud e Mello, 2000).

Salientamos que um sistema semiótico exige a referência aos signos, que além de estabelecerem a comunicação, são a base das atividades cognitivas, possibilitando assim a apreensão das significações conceituais. Isso indica que nas ações cognitivas estabelecidas a partir de registros de representações semióticas, muitos registros podem ser mobilizados para um mesmo objeto matemático. As diversas representações de um mesmo objeto têm sentidos e tratamentos diferentes, que exigem um esforço cognitivo do aluno no sentido da mobilização e da coordenação destes registros, entendendo que existe distinção entre o objeto e as suas representações.

Estas reflexões encaminham à discussão sobre a apreensão dos objetos da geometria, que conforme Duval (1995) precisam abordar três registros: a língua materna, o figural e o algébrico. De acordo com o autor, ao nos referirmos a um objeto matemático, precisamos das representações que possibilitam ao sujeito a apreensão do conceito. Em relação ao diálogo de sala de aula, o qual envolve a identificação da superfície, considera-se que a língua materna é o registro que desencadeia tal ideia. Isso fica evidente em todo o diálogo narrado, envolvendo a docente e os alunos, enfocando principalmente a diferenciação da linha (contorno) e o que esta linha determina (uma figura que é delimitada, formando uma região). O registro figural se estabelece considerando o espaço perceptivo da quadra de esporte da escola, que levou à construção de um espaço representativo – construção de modelos geométricos representando as figuras. O registro algébrico é identificado no caderno de um aluno quando do registro das unidades de medida da superfície – o registro fracionário e decimal.

Deste modo, a problematização, a partir do espaço da quadra de esporte, possibilita aos alunos a visualização que leva à exploração heurística da situação, envolvendo o conceito de superfície como uma figura que é determinada a partir de uma região delimitada no plano e, consequentemente, à utilização de registros de representação envolvendo o número racional.

Destaca-se que, para Rego (2004), a fala é entendida como instrumento ou signo e tem um papel fundamental de organizadora da atividade prática e das funções psicologicamente humanas. As elaborações produzidas na sala de aula aparecem encadeadas, efetivando-se num movimento dialético de produção de sentidos. O enunciado de um interlocutor é composto pelas falas dos demais interlocutores, sejam eles alunos ou docente. Percebe-se, como afirma Fontana (1995), que os sentidos elaborados são em parte nossos e em parte do outro, são o efeito da interação entre os interlocutores num movimento de compreensão e expressão.

Neste movimento, a interlocução proporciona que novos entendimentos, novas compreensões sejam internalizadas e, pela interferência da docente na elaboração conceitual, novos níveis de sistematização sejam alcançados pelos alunos. À luz do princípio dialógico de Bakhtin (2004), o processo de elaboração conceitual configura-se como um processo discursivo, pela articulação e pelo confronto de múltiplas vozes em processo de interação (compreensão/expressão).

De acordo com as interações explicitas neste episódio, pontuamos que foi necessário aos alunos ultrapassar a ideia de medida linear (marcada pelas linhas/laterais da quadra), que se evidencia no conceito de Medidas de Comprimento, em que segmentos de reta são limitados e podem ser medidos. É preciso compreender para além do contorno da figura, considerando a região delimitada por este contorno. Neste sentido, foi necessária a intervenção da docente, articulando a discussão para a região definida por segmentos delimitados. Esta região modifica-se a partir das medidas destes segmentos e das formas que os constituem. Estas discussões, identificadas pelas falas dos alunos, representam a apreensão discursiva da figura identificada, possibilitando o levantamento de hipóteses acerca dos conceitos necessários à elaboração conceitual de Medidas de Superfície – plano, segmento, superfície, região, contorno, limite...

No momento em que os alunos conseguem identificar uma região no espaço, torna-se necessário uma nova intervenção da docente, para escolher qual é a unidade de medida para esta superfície. A estratégia utilizada é a comparação da superfície a ser medida com outros objetos, buscando uma unidade de Medida de Superfície. Esta questão é encaminhada pela docente ao solicitar aos alunos que meçam objetos, tendo como unidade o caderno, a folha de ofício, a folha de jornal, a caixinha de CD. Esta comparação entre superfícies possibilita o entendimento das grandezas mensuráveis, comparando grandezas de mesma natureza, realizando a escolha de instrumentos e de unidades adequadas para a medição e a ampliação do campo numérico, que, neste caso, refere-se aos números naturais e racionais – registros fracionários e decimais.

Percebe-se, no caderno (fig.2), que o aluno ao determinar a medida da superfície do mapa utiliza dois registros de representação: o registro decimal, ao escrever 40,5 caixinhas de CD e o registro fracionário, ao escrever 81/2 caixinhas de CD. Estas representações indicam as significações que estão associadas aos sentidos produzidos pelos alunos, que são essenciais no processo de ensino. Para que as questões abordadas nesta reflexão sejam compreendidas, acreditamos ser importante a distinção entre estes dois conceitos – *sentido e significado*.

Vigotski (2001) ao tratar das relações entre pensamento e linguagem, apresenta as diferenças entre o sentido e o significado da palavra, que, se consideradas pelo docente no decorrer das aulas, podem contribuir/influir no processo de elaboração do saber matemático. De acordo com o autor acima citado, é no significado que se encontra a unidade das duas funções básicas da linguagem, o intercâmbio social e o pensamento generalizante. São os significados que possibilitam a mediação simbólica entre o indivíduo e o mundo. Conforme Luria (apud Moysés, 2001, p. 39), o significado é um sistema de relações formado objetivamente durante o processo histórico e se encontra contido na palavra. Assim, quando o significado de uma palavra é apropriado, está se dominando uma experiência social. Por ser de caráter social, os significados são construídos ao longo da história e estão em constante transformação. No processo de aprendizagem escolar, as transformações acontecem principalmente a partir de definições, de referências e de ordenações de diferentes sistemas conceituais, tornando-se cada vez mais próximos dos conceitos estabelecidos na cultura científica (conceitos científicos).

O significado constitui um núcleo relativamente estável de compreensão da palavra, compartilhado por todas as pessoas que a utilizam. Já o sentido refere-se ao significado da palavra para cada indivíduo, composto por relações que dizem respeito ao contexto do uso da palavra e às vivências afetivas do indivíduo. O sentido da palavra liga seu significado objetivo ao contexto e aos motivos afetivos e pessoais e relaciona-se com o fato de que a experiência individual é sempre mais complexa do que a generalização contida nos signos (Oliveira, 2004, pp. 50-51). Desta forma, "o compartilhar dos significados é fundamental para que haja compreensão nas relações interpessoais" (Moysés, 2001, p. 41), e a *comunicação se estabelece pela linguagem a partir da produção de sentidos e na negociação de significados*.

3. A Linguagem Matemática e a Mediação

Ao fazer referência aos objetos matemáticos, conforme afirmam Davis e Hersh (1985, p. 156), é possível agir de duas maneiras diferentes: *calcula-se* e *interpreta-se*. Nos cálculos, uma cadeia de símbolos matemáticos é processada de acordo com um conjunto de convenções padronizadas e transformada em outra cadeia de símbolos. Já interpretar um símbolo é associar-lhe algum conceito ou imagem mental, assimilá-lo na consciência humana. Os autores acima afirmam que as regras de cálculo deveriam ser tão precisas quanto as operações de um computador. No entanto, as regras de interpretação não podem ser mais precisas do que a comunicação de ideias entre os seres humanos. Machado (1998, p. 96) corrobora esta discussão ao afirmar que muito mais do que a aprendizagem de técnicas para operar com símbolos, a Matemática relaciona-se com o desenvolvimento da capacidade de interpretar, analisar, sintetizar, significar, conceber, transcender o imediatamente sensível, extrapolar, projetar. Estes processos, sejam eles de cálculo ou de interpretação, estabelecem-se *com* e a *partir* de uma linguagem matemática.

Tendo em vista a universalização do saber matemático, a humanidade desenvolveu historicamente uma simbologia própria nesta área de saber, com o emprego de vários signos, cujo significado ultrapassa o domínio de uma cultura local. A Matemática, conforme Pais (2006, p. 72), é uma ciência que desenvolve em sua história uma linguagem específica, que exerce uma função objetiva tal qual o próprio significado de seus conceitos.

Na Matemática, a linguagem é mais precisa e objetiva, os signos têm um sentido preciso, o que significa que, no âmbito escolar, a apreensão da significação das palavras e dos demais signos é fundamental. Assim, as estratégias metodológicas, nas aulas de matemática, precisam, de acordo com Pais (2006, p. 75), explorar a diferença entre o significado matemático dos termos e o sentido subjetivo que podem assumir no contexto da linguagem cotidiana, visando ao desenvolvimento de uma linguagem mais próxima da ciência e da percepção de quando um aluno associa a um termo um sentido diferente daquele previsto no contexto da Matemática. Para isso ser possível é indispensável que o professor *enxergue o aluno,* que não só permita e possibilite que ele se expresse (de forma gestual, oral, escrita), mas que considere suas manifestações discursivas.

A Matemática possui uma linguagem própria, o que em certos momentos históricos confundiu-se com a própria Matemática. Esta linguagem é constituída a partir de registros de representação e apresenta diversos níveis de elaboração. Aquela utilizada pelos matemáticos sofre transformações ao ser ensinada/aprendida numa aula de Matemática da Educação Básica. Modificações para as quais o docente precisa estar atento para não conferir um destaque excessivo, a ponto de privilegiar sua formalidade em detrimento de uma elaboração conceitual. A linguagem formal de uma determinada expressão matemática (definição, demonstração ou conceito matemático) pode ser um ponto de referência, mas precisa estar íntima e fortemente ligada a um contexto de articulações capaz de mobilizar a produção de sentidos. A aprendizagem de um sistema simbólico não deve, nem pode estar desconectada do que pretende ser comunicado.

Ler matematicamente uma informação é ter consciência e compreensão da mensagem impressa no sistema simbólico. Atribuir significado à ideia traduzida, corresponde a uma aproximação do fazer matemático ao mundo das experiências. É a apropriação do significado da mensagem lida que possibilita sua inserção nas relações que podem ser estabelecidas com o mundo (Schwantes, 2004, p. 101).

No episódio apresentado, percebemos que a linguagem matemática articula-se com a língua materna. Entretanto, a linguagem matemática não é materna. A significação de seus conceitos fundamenta-se no seu uso. Por exemplo, palavras como superfície, fração, decimal e medidas têm um significado matemático que não é, necessariamente, aquele usado no cotidiano, na língua materna. A significação matemática de tais palavras está fortemente articulada à elaboração de seus conceitos, via registros de representação. Nesse processo, língua materna e linguagem matemática precisam estar constante e sistematicamente articuladas para que, *na* e *pela* produção de sentidos, se estabeleça um processo de ensino e de aprendizagem que encaminhe o aluno à apropriação da significação científica de conceitos.

Entendemos a linguagem matemática como um aspecto central na construção do saber matemático, como também, em todo o processo de ensino e de aprendizagem relacionado a este campo de saber, porém, sob enfoques totalmente diferentes. O trabalho do docente envolve o desafio que consiste em realizar uma atividade, que, em certo sentido, é inverso daquela do matemático. O matemático tenta eliminar as condições contextuais da sua pesquisa, buscando níveis superiores de generalização e a formalização de sua produção textual. O professor de Matemática, ao contrário, precisa (re)contextualizar o "conteúdo", criando uma situação capaz de possibilitar ao aluno um processo de conceituação, para propiciar um trabalho de interpretação e significação, criando, *através e com a linguagem,* caminhos para atingir um nível superior de generalização, de sistematização e de formalização, que configuram os conceitos matemáticos.

Caraça (2002) nos ajuda no entendimento de algumas importantes questões que explícita ou implicitamente constituem as respostas apresentadas na letra *d* do caderno do aluno (figura 2), ao mostrar o aspecto aritmético da dificuldade de relações entre números a partir da impossibilidade da divisão. Dito de outra forma, a partir da expressão numérica de uma medida, considerando dois segmentos (Figura 3), $\overline{AB}$ medindo 11 unidades e $\overline{CD}$ medindo 3 unidades, faz-se a pergunta: quantas vezes o segmento $\overline{CD}$ cabe no segmento $\overline{AB}$? Pelo princípio da economia, esta medida é dada pela razão dos dois números 11 e 3, porém, esta razão não existe em números inteiros, visto que 11 não é divisível por 3. O autor chama a atenção que, para resolver esta dificuldade, não é suficiente o conjunto dos números naturais, é preciso a criação de um novo campo numérico: o conjunto dos números racionais, o qual compreende o conjunto dos números naturais.

Figura 3
Segmentos considerados na medida (Caraça, 2002).

A_._._._._._._._._._._B C_._._D

De certa forma, uma situação análoga a esta foi vivenciada pelos alunos, através das atividades propostas. Houve a necessidade de usar um campo numérico, o qual, apesar de já ter sido trabalhado em diversas e diferentes atividades, ainda não foi sistematizado e generalizado por todos os alunos. Conforme afirma Duval (2003) dominar um registro de representação não é suficiente para conceituar, por isso é necessário a mobilidade entre, no mínimo, dois registros de representação de um mesmo objeto matemático.

Em relação ao aspecto aritmético desta questão, Caraça (2002) apresenta a seguinte reflexão: tendo dois números inteiros m e n ($n \neq 0$), se a qualidade é de m não ser divisível por n, a operação da divisão nega a existência do número quociente. A essência da definição apresentada pelo autor consiste precisamente em negar essa negação e, assim, construir um novo número racional com registro fracionário, que constitui a parte nova do campo generalizado. A *negação da negação*, conforme afirma o autor, é uma poderosa operação mental criadora de generalizações.

Caraça (2002) diz que o caminho da generalização compreende sempre três etapas: 1ª) reconhecimento da existência de uma dificuldade (no caso o dividendo não era divisível pelo divisor); 2ª) determinação do ponto nevrálgico onde essa dificuldade reside, uma negação (no caso, no campo dos números naturais não foi encontrada a solução); e 3ª) negação dessa negação (no caso, criação de um novo campo numérico, os números racionais).

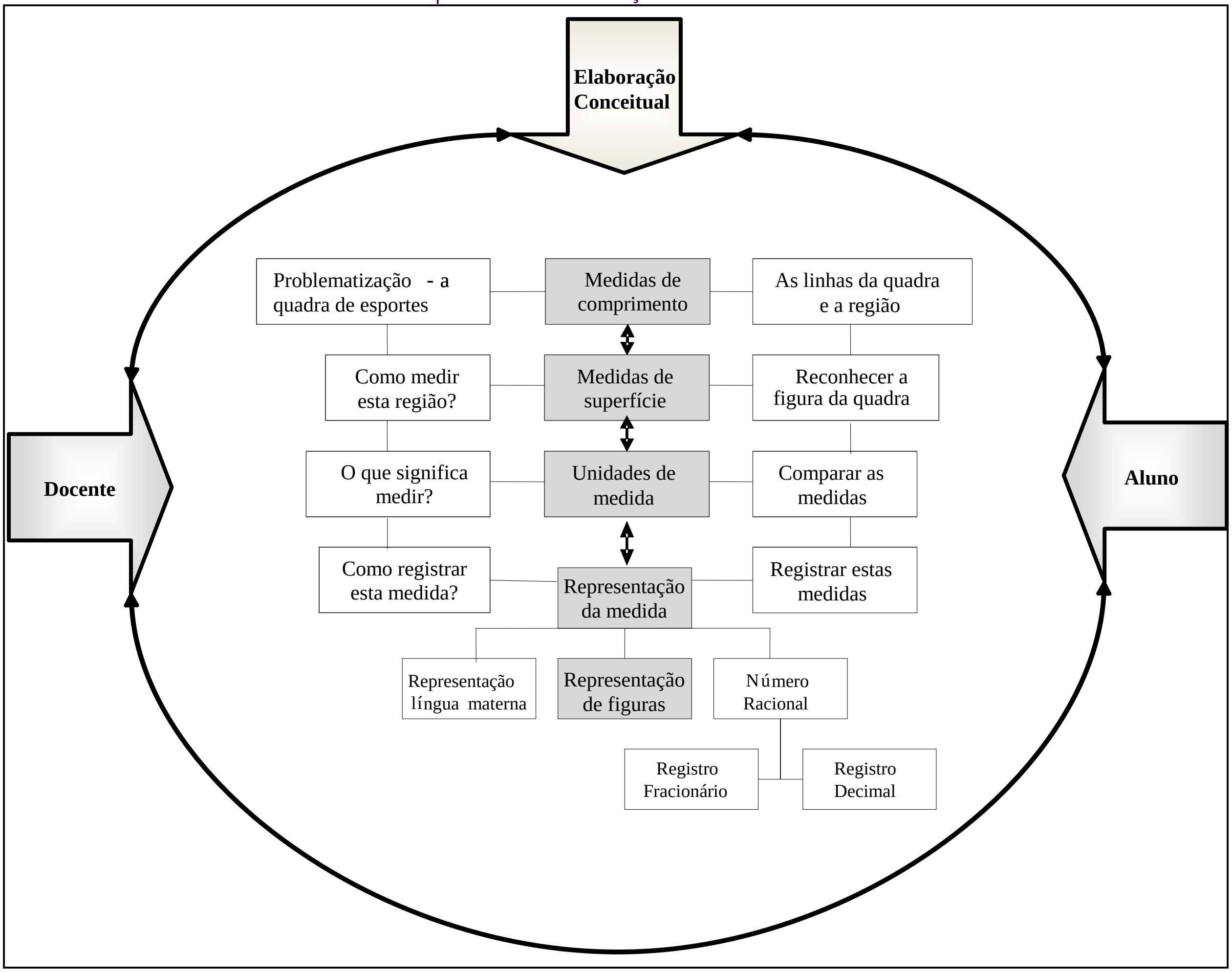
Para estabelecer as definições necessárias à compreensão dos números racionais, o autor apresenta dois critérios que atuam como fios condutores de raciocínio. O primeiro está relacionado à origem concreta dos números racionais, ou seja, o significado como expressão numérica de medição de segmentos. O segundo critério é o princípio da economia de pensamento, utilizando para as propriedades deste novo campo numérico as definições dadas aos números inteiros e a manutenção das leis formais de operação, envolvendo os tratamentos necessários para cada uma.

Caraça (2002) proporciona a compreensão do processo de "criação" deste objeto de saber matemático, mostrando que, em sua gênese, o número racional está intrínseca e fortemente ligado ao conceito de medida. Processo este muito diferente daqueles apresentados em muitos livros didáticos ("porto seguro" de um grande número de professores de matemática). Neste "porto", nem sempre tão seguro assim, os números racionais são apresentados aos alunos em sua definição formal ou numa perspectiva empírica, em conjuntos contínuos (corte de pizza, frutas,...), ou seja, a ênfase se estabelece sobre os registros fracionários ou decimais e não sobre o campo conceitual dos números racionais que se efetiva pelas medidas, representadas pelos registros fracionários e decimais. Portanto, distante de possibilitar um *processo* de elaboração conceitual.

Se situações criadas artificialmente, análogas às apresentadas por Caraça (2002), são propostas nas aulas de Matemática, certamente as possibilidades de inserir o aluno num *processo de elaboração conceitual* aumentam consideravelmente. Tais situações colocam o "conteúdo" em um contexto, possibilitando ao aluno fazer uma série de inferências. O docente, como mediador deste processo, pode, então, perceber os sentidos produzidos e propor ações didáticas visando a apropriação de significações conceituais, através e com a linguagem.

Nesta perspectiva, sistematizamos esquematicamente o processo de elaboração conceitual, a partir da empiria – situação de sala de aula articulada com os aportes teóricos desta pesquisa.

Figura 4
Esquema da Elaboração Conceitual



A linguagem matemática representada no esquema pelos registros de representação e significação conceitual é distinta, mas se constitui e se desenvolve simultaneamente, quando tratada num contexto que valoriza as potencialidades e respeita as individualidades dos alunos, possibilitando a produção de sentidos.

Na perspectiva histórico-cultural, a linguagem é um processo fundamental na aprendizagem e no desenvolvimento das funções superiores do indivíduo. A elaboração conceitual, no âmbito escolar, necessita de um processo de aprendizagem sistemático. O aprendizado é um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas, sendo central em sua concepção sobre o homem. Cavalcanti aprova esta ideia ao afirmar que "há uma relação de interdependência entre os processos de desenvolvimento do sujeito e os processos de aprendizagem, sendo a aprendizagem um importante elemento mediador da relação do homem com o mundo, interferindo no desenvolvimento humano" (2005, p. 194).

Nas interações sociais mediadas pela linguagem, os saberes considerados como formas culturalmente construídas, passam a ser internalizados. A interação, mediada por instrumentos e por signos, produz modificações no indivíduo, pois são as ações partilhadas que o levam a se apropriar de um saber construído em uma cultura e a se modificar, concomitantemente.

O aprendizado possibilita, assim, o despertar de processos internos de desenvolvimento. O ensino, conforme Cavalcanti (2005), não pode ser identificado como desenvolvimento, mas sua realização eficaz resulta no desenvolvimento intelectual do aluno. Na abordagem histórico-cultural, o bom ensino é aquele que se adianta aos processos de desenvolvimento. Nas palavras de Vigotski, "[a] aprendizagem e o desenvolvimento não coincidem imediatamente, mas são dois processos que estão em complexas inter-relações. A aprendizagem só é boa quando está à frente do desenvolvimento." (2001, p. 334). Neste sentido, o aprendizado escolar desempenha um papel decisivo na gênese e no desenvolvimento de funções psicológicas básicas para a elaboração conceitual e a compreensão da realidade.

Para Vigotski (2001), a linguagem é ferramenta básica na apreensão do saber, instrumento simbólico básico do ser humano e age sobre o pensamento, modificando-o e possibilitando o desenvolvimento da estrutura das funções psicológicas superiores. A linguagem, de acordo com este autor, é uma ferramenta que se constitui nos processos intersubjetivos para vir a se tornar uma ferramenta intra-subjetiva, uma ferramenta do pensamento. O signo é o meio pelo qual, dialogicamente, ocorre a constituição e a existência do pensamento. É por meio da linguagem que o aluno potencializa o processo de desenvolvimento cognitivo, tornando-se aos poucos um instrumento de seu pensamento. Nessa perspectiva, *a linguagem matemática, como organizadora do pensamento matemático, possibilita aos alunos elaborarem uma forma particular de pensar, extrapolando este campo de saber, a reconstituição do próprio pensamento, bem como o desenvolvimento de suas potencialidades.*

Apropriar-se de significações de conceitos matemáticos, no contexto escolar, sob esta perspectiva, implica que o docente considere as normas que regulam o processo de instrução matemática, apontadas por Godino *et alii.*

- Las matemáticas susceptibles de ser enseñadas y aprendidas en una institución.
- La manera en que los alumnos construyen y comunican las nociones, procesos y significados matemáticos.
- Las interacciones docente-discente y discente-discente.
- El uso de los recursos humanos, materiales y temporales.
- La afectividad de las personas que intervienen en el proceso de estudio.
- La relación con el entorno (sociocultural, político, laboral…) en el que se desarrolla el proceso de instrucción. (Godino *et al.*, 2009, p. 64)

Ao considerar estas normas, faz-se necessário que as ações docentes estejam constante e sistematicamente voltadas a possibilitar atividades que promovam o *compartilhar* de ideias. Essa sistemática possibilita não só a produção de sentidos e de modos de operar intelectualmente, mas também elaborar, participar e negociar significados. As inter-relações da sala de aula, marcadas pelo diálogo e pela assimetria entre professor e alunos, devem visar as significações científicas dos conceitos, estando ancoradas nos sentidos produzidos pelos mesmos. A gestão da sala de aula precisa ser capaz de romper com o silêncio, o monólogo e a passividade que em muitas situações configuram as aulas de Matemática, cabendo ao docente orientar, estimular, desvelar os significados que precisam ser negociados e produzidos pelos alunos.

Concluindo...

A discussão apresentada, neste texto, em relação à linguagem matemática como desencadeadora de sentidos e de significados no contexto escolar, na perspectiva da abordagem histórico-cultural e da teoria dos registros de representação, possibilita contribuir com a prática dos professores, considerando a necessidade de interações nas aulas de Matemática a partir da vivência e da produção de atividades que primem pela elaboração conceitual. Neste sentido, a linguagem matemática necessita de uma articulação entre a língua materna e os sentidos produzidos na coletividade da ação pedagógica, articulando significados, que são elaborados a partir dos diferentes registros de representação semióticas de um mesmo objeto matemático. Para que se estabeleçam processos de generalização e de abstração faz-se necessário a mediação do docente com o grupo de alunos acerca do objeto matemático, para que os diferentes registros de representação sejam considerados e articulados, possibilitando a apropriação da significação dos conceitos matemáticos.

A língua materna pode desencadear os outros registros, como apontamos na primeira parte da atividade – o episódio da quadra de esportes e a problematização gerada a partir dos questionamentos e dos encaminhamentos docentes. Em relação ao conceito de superfície, os alunos precisaram rever os conceitos de Medidas de Comprimento e de Unidades de Comprimento, ampliando a ideia de contorno à de uma região limitada no plano, considerando a figura representada pela quadra. Também, a partir da língua materna, os alunos foram desafiados à medição de superfícies, comparando-as, escolhendo unidades de medida e registrando-as numericamente, ampliando a significação do conceito de Medidas de Superfície e de Número Racional.

Portanto, o processo de elaboração conceitual necessita da mediação docente, pois este não se estrutura apenas pela língua materna, está ancorado na identificação e na mudança de registros de representação, que são articulados pelas atividades de ensino – planejamentos, encaminhamentos, intervenções, avaliações. Nesta perspectiva,

> El profesor de matemáticas tiene que tomar deciosiones en su quehacer diario y para ello necesita pautas de actuación, algunas de las cuales vienen dadas desde instancias oficiales, académicas, o son generadas en su propia práctica. Estas pautas se refieren a la planificación global de su trabajo, al desarrollo de unidades didácticas, o a los modos de interacción con los alumnos, el saber matemático y los recursos didácticos. (Godino, Font,Wilhelmi e De Castro, 2009, p 72).

O professor, tomando consciência da potencialidade da sua prática, consegue intervir no processo de ensino e na aprendizagem do seu aluno, na medida em que, na sua liberdade de gestão, considerar momentos de reflexão permeados pelo entendimento dos conceitos matemático, como se ensina, como se aprende, como a instituição escolar se movimenta e se mobiliza e as necessidades impostas pela sociedade às instituições educativas.

Referências

Almouloud, S. A.; Mello, E. G. S. de. (2000). *Iniciação à demonstração: apreendendo conceitos geométricos.* 23ª reunião da ANPED.

Bakhtin, M.(2004). *Marxismo e filosofia da linguagem*. Tradução de Michel Lahud e Yara Frateschi Vieira. 11. ed. São Paulo: Hucitec.

Battisti, I. K. (2007). *A significação conceitual de medida de superfície sob uma abordagem histórico-cultural: uma vivência no contexto escolar.* Dissertação. (Mestrado em Educação nas Ciências) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí.

Caraça, B. de J. (2002). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 4.ed. Lisboa: Gradiva.

Cavalcanti, L. de S. (2005). Cotidiano, mediação pedagógica e formação de conceitos: uma contribuição de Vygotsky ao ensino de geografia. In: *Educação geográfica e as teorias de aprendizagens*. *Cadernos Cedes*, Campinas, SP,n. 66, p.185-207.

Davis, P.J. e Hersh, R. (1985). *A experiência matemática*. Tradução de João Bosco Pitombeira. 2.ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves.

Duval, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Paris: Peter Lang, 1995.

_______. (2003). Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.* Campinas, São Paulo: Papirus, p. 11-33.

Fontana, R. A. C. (1995). A elaboração conceitual: a dinâmica das interlocuções na sala de aula. In: Smolka, A. L. e Góes, M. C. R. de (Orgs.). *A linguagem e o outro no espaço escolar:* Vygotsky e a construção do conhecimento. 4.ed. Campinas, SP: Papirus. (Coleção Magistério: Formação e trabalho pedagógico).

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. e De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didática de las matemáticas desde um enfoque ontosemiótico. In: *Insvestigación Didáctica*. 27(1), 59-76.

Machado, N. J. (1998). *Matemática e língua materna:* análise de uma impregnação mútua. 4.ed. São Paulo: Cortez.

Moysés, L. (2001). *Aplicações de Vygostky à educação matemática*. 3.ed. Campinas, SP: Papirus. (Magistério: Formação e trabalho pedagógico)

Oliveira, M. K. (2004). *Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento - um processo sócio-histórico.* 4. São Paulo: Editora Scipione.

Pais, L. C. (2006). *Ensinar e aprender matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Pino A.. (2000). O conceito de mediação semiótica em Vygotsky e seu papel na explicação do psiquismo humano, Pensamento e Linguagem. In: *Cadernos Cedes*, 3.ed., Campinas - SP, n. 24, p.38-51.

Rego, T. C. (2004). *Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação*. 16.ed. Petrópolis, RJ: Vozes. (Educação e Conhecimento).

Schwantes, V. (2004). *Pensamento algébrico: uma reflexão sobre seu desenvolvimento no ensino fundamental.* Marechal Cândido Rondon, PR: Ponto e Vírgula.

Vigotski, L. V. (2001). *A Construção do pensamento e da linguagem*. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes.