

Errores en geometría: clasificación e incidencia en un curso preuniversitario

MÓNICA BOCCO

CLAUDINA CANTER

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Agropecuarias,
Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

1. Introducción

Los estudiantes de la carrera de Ingeniería Agronómica, y también los ingenieros agrónomos, en muchas situaciones diarias tienen contacto y necesidad del reconocimiento de formas, relaciones o estructuras de superficies y cuerpos, en definitiva del uso de la geometría. Para un desempeño satisfactorio en su labor, es necesario que comprendan, diferencien y apliquen conceptos como longitud, superficie y volumen, además de poder reconocer y utilizar correctamente la unidad de medida correspondiente en cada caso.

Por lo tanto, es importante conocer, por parte de los docentes de la carrera de Agronomía, las dificultades que tienen los alumnos con estos temas con el objetivo de planificar las mejores instancias de enseñanza-aprendizaje. Los errores que cometen los estudiantes son los indicios que percibe el profesor de los procesos mentales que realizan. Según Socas (1997) la presencia del error ésta evidenciando la existencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente una falta de conocimiento o despiste.

Por esto, es importante conocer el origen de los errores, con el fin de acompañar el proceso de reestructuración de los esquemas mentales de los alumnos para que, de esta forma, puedan lograr la comprensión del tema. También es necesario evaluar, para quienes poseen los conceptos, los errores cometidos al aplicar estrategias para transferir a la nueva situación de aprendizaje, como lo expresan Monereo *et al.* (1998): "facilitar la transferencia de las estrategias de aprendizaje utilizadas a otras tareas, materias y, si es posible, a otros contextos, promoviendo referencias explícitas a diferentes situaciones y recordando los aspectos referentes a cuándo y por qué decidimos que es útil una determinada estrategia".

Los errores han estado presentes a lo largo de todo el desarrollo de las ciencias, de hecho el avance de las mismas se da por el reconocimiento, análisis y posterior superación de los mismos, como dice Charnay (citado por Engler *et al.*, 2004) "considerar el error no como una falta o una insuficiencia sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos".

El estudio de errores está conectado con la práctica docente y por lo tanto puede resultar muy útil para los profesores, para quienes realizan planes de estudio y para investigadores interesados en el diagnóstico y la eliminación de los errores cometidos por los alumnos.

Revista Iberoamericana de Educación / Revista Ibero-americana de Educação

ISSN: 1681-5653

n.º 53/2 – 10/07/10

Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI)

Organização dos Estados Ibero-americanos para a Educação, a Ciência e a Cultura (OEI)



En el aprendizaje de la matemática, el estudio de los errores ha ocupado gran parte de las investigaciones en educación. En las primeras décadas del siglo XX, en Estados Unidos y en Alemania, aparecen las primeras investigaciones sobre errores cometidos por los alumnos. Se considera a Wiener como el fundador de la investigación didáctica orientada al estudio de errores (Rico, 1995).

En la década de 1950 surge un nuevo enfoque relacionado con el procesamiento de la información, en esta fase se destacaron Lankford, Brow y Burton (Abrate *et al.*, 2006). Desde los 60, y hasta la actualidad, el análisis de errores tuvo una visión más constructivista, en esta etapa se destacan los aportes de H. Radatz (1979), N. Movshovitz-Hadar *et al.* (1987), G. Brousseau (2007), M. Socas (1997) y J. Astolfi (1999). Después de llevar a cabo una revisión de todas las investigaciones sobre errores, Radatz (1979), llega a la conclusión de que la mayor parte de los estudios y análisis se han realizado en el área de la Aritmética.

El análisis de los errores cometidos en Geometría ha sido escasamente tratado, a pesar de que en esta rama de la matemática los alumnos, en general, presentan mayor dificultad. Es por esto que los nuevos aportes al análisis de los errores que cometen los alumnos en esta área, contribuirán a la organización y planificación de nuevas metodologías de enseñanza, logrando así que las estrategias propuestas por el docente sean adecuadas para un desarrollo positivo en el proceso de aprendizaje de la geometría y sus aplicaciones.

Con el objetivo de contribuir a la articulación entre la escuela media y la universidad, planteamos analizar los errores cometidos por alumnos, aspirantes a ingresar a la carrera de agronomía, en la aplicación de conceptos geométricos relevantes, tanto para la carrera como para su desarrollo profesional.

2. Marco teórico

Los errores en el estudio de la matemática, según Radatz (1979), no son simplemente la ausencia de respuestas correctas o el resultado de accidentes desafortunados, ellos son la consecuencia de procesos definidos cuya naturaleza debe ser descubierta.

Afirma el autor que la consideración de los aspectos diagnosticados en base a los errores podría ayudar a los profesores a planificar los contenidos del plan de estudios teniendo en cuenta las dificultades de los alumnos. Para lograr que esta planificación sea exitosa no solo es necesario realizar un diagnóstico de los errores cometidos por los estudiantes, sino también complementarlo con investigaciones sobre modelos de errores y sobre los modelos cognoscitivos de las causas de los mismos, es decir el diagnóstico de las dificultades debe ser integrado con las conclusiones de la psicología educativa y social.

Como afirman Del Puerto *et al.* (2006), es difícil hacer una separación estricta entre las causas posibles de un error, ya que en muchos casos no hay una sola causa para un determinado error. A pesar de esto, el análisis del error diagnóstico provee información tanto sobre preguntas básicas de la investigación en el aprendizaje matemático como ayuda práctica para el profesor con respecto a la individualización de la enseñanza.

Para Movshovitz-Hadar *et al* (1987) la mayor parte de los errores que cometen los estudiantes de la escuela secundaria, en matemática, no son accidentales, sino que son derivados de un proceso cuasi-lógico que de alguna manera tiene sentido para el alumno.

Los autores consideran que el análisis constructivo del error sirve para comprender en que casos una solución equivocada es una respuesta correcta, para saber que lógica puede justificar lo hecho por el estudiante. Considera también que los modelos descriptivos de errores matemáticos pueden ayudar a los docentes a prever dificultades y al mismo tiempo pueden proporcionar un inventario de posibles distractores, útiles para la confección de exámenes con múltiple opción. Más aun, la investigación es necesaria para averiguar si un cierto estilo de enseñanza está asociado a patrones particulares de errores.

Desde la concepción de Brousseau (1983), el error no puede considerarse sólo como la evidencia de la ignorancia, de la incertidud o del azar ya que este puede ser producto de un conocimiento anterior que en su momento le ayudó a resolver distintas situaciones exitosamente pero ahora se revela falso o simplemente inadaptado, a estas concepciones el autor las llama obstáculos. Esta clase de errores, producto de obstáculos, son previsible.

Los errores persistentes se reproducen una y otra vez pues están ligados a la manera de conocer del alumno y además, porque en muchas otras ocasiones ha tenido éxito utilizando el procedimiento que ahora ya no le es útil. Es por eso que eliminar un obstáculo exige un arduo trabajo pues hace falta una cantidad suficiente de situaciones nuevas que logren desestabilizar al alumno para que luego este, por su cuenta, reestructure sus conocimientos anteriores o bien los rechace y los olvide.

Astolfi (1999), sostiene que los errores se presentan como indicios para lograr comprender el proceso de aprendizaje y para identificar las dificultades de los estudiantes. Este autor está convencido de que es posible apoyarse en los errores cometidos por los alumnos para analizar lo que se pone en juego en cada clase y así realizar una mejor intervención educativa; por esto propone poner al error en el centro del proceso enseñanza-aprendizaje.

Por las anteriores reflexiones, Astolfi (1999), propone una clasificación de los errores donde se tenga en cuenta la naturaleza del error ya que de ese modo se facilita el análisis del tipo de mediaciones posibles para remediar el mismo. Además, remarca que las equivocaciones no cederán mediante una única operación, es por eso que es necesario concienzarse de dichos errores para trabajarlos por confrontación, disponiendo en todo momento de nuevos modelos para desarrollar los diferentes temas.

Socas (1997), pone énfasis en las dificultades que genera en los alumnos el aprendizaje de la matemática, las mismas, indica, que se manifiestan en forma de errores. Asegura que las procedencias de los errores son muy diversas, no solo son consecuencia de falta de conocimiento o despiste, sino que también debe asociarse a la presencia, en el alumno, de un esquema cognitivo inadecuado. De hecho, en el desarrollo del conocimiento matemático destaca la importancia del error como base para el nacimiento de nuevos conceptos y teorías que, tal vez, no se hubiesen desarrollado sin el análisis crítico de lo anterior. Este tipo de situaciones también se da en el ámbito educativo ya que los estudiantes desarrollan métodos válidos en algunos casos solamente y con el tiempo los mejoran o descubren otros.

Este autor sostiene que conocer los errores básicos cometidos por los alumnos es de gran importancia para el docente porque le brinda información sobre la forma en que los estudiantes interpretan y los procedimientos que utilizan. Por esto siempre que el profesor use el conocimiento de las falencias para promover un mejor aprendizaje es necesario diagnosticar y tratar seriamente los errores de los alumnos. Concluye que la enseñanza debe tomar los mismos errores de los alumnos como punto de partida para diagnosticar y después eliminar los mismos: "las estrategias de enseñanza deben ir encaminadas a detectar los errores y provocar el conflicto en los alumnos, fomentando ideas que permanezcan activas más allá de la clase de matemática y capacitándole para evaluar si sus ideas o métodos son o no correctos en una determinada tarea matemática".

A pesar de que, en rasgos generales, todos los autores comparten la misma idea sobre el significado de los errores cometidos por los alumnos y destacan la importancia del estudio de los mismos, cada uno plantea una clasificación diferente:

2.1. Modelo de clasificación de errores según Movshovitz (1987)

Categorías propuestas:

- *M1) Errores debido a datos mal utilizados:* Incluye los errores que pueden ser relacionados con alguna discrepancia entre los datos dados en el problema y cómo el alumno los trató.
- *M2) Errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje:* Incluye los errores que surgen por una traducción incorrecta de hechos matemáticos a un lenguaje coloquial y viceversa.
- *M3) Errores debidos a inferencias no validas lógicamente:* Incluye los errores cometidos por un razonamiento incorrecto. Esta nueva información, inválida, es luego utilizada para resolver el problema planteado ocasionando una respuesta errónea.
- *M4) Errores debido al uso de teoremas o definiciones deformadas:* Incluye los errores que aparecen por una distorsión de un principio, una regla, teorema o definición. En esta categoría se encuentran los errores por aplicaciones de teoremas sin las condiciones necesarias, por aplicación de propiedades que no corresponden, por la realización de una valoración inadecuada de una definición, teorema o formula.
- *M5) Errores debidos a la falta de verificación de la solución:* Incluye los errores cometidos en el resultado final pero no en el proceso, es decir, cada paso dado por el examinado es correcto en sí mismo, pero el resultado final, tal como se presenta, no es una solución para el problema dado. En esta categoría se incluyen los errores que de haber existido una verificación por parte de alumno hubiesen sido eliminados.
- *M6) Errores técnicos:* Incluye los errores de cálculo, los errores en la extracción de datos de las tablas, los errores en la manipulación de símbolos algebraicos elementales, etc.

2.2. Modelo de clasificación de errores según Radatz (1979)

Categorías propuestas:

- R1) *Errores debidos a la dificultad del lenguaje*. Para muchos alumnos el aprendizaje de conceptos matemáticos, los símbolos, y el vocabulario es una "lengua extranjera". Esta dificultad es, en muchos casos, la causal del error.
- R2) *Errores debidos a dificultades para obtener información espacial*. Muchos errores matemáticos surgen de las diferencias entre las imágenes espaciales y el pensamiento espacial de los alumnos. Estos errores aparecen cuando es necesario hacer una representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico y no se logra realizarlo con éxito.
- R3) *Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos*. Incluyen las deficiencias en el contenido y los problemas específicos de conocimiento, necesarios para desenvolverse satisfactoriamente en la tarea matemática. Estas deficiencias pueden originarse en el desconocimiento de algoritmos, manejo inadecuado de conceptos básicos, realización de procedimientos incorrectos, incompreensión de símbolos, etc.
- R4) *Errores debidos a la rigidez de pensamiento*. Surgen por la falta de flexibilidad en el pensamiento, es decir el alumno no puede adaptar lo que ya sabe a situaciones nuevas. En esta categoría están los errores de asociación, de inferencia, de asimilación y los errores generados por la aplicación de reglas y propiedades válidas solo en algunos casos.
- R5) *Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes*. Son aquellos producidos por el desarrollo incorrecto de algoritmos, la falta de estrategias en la solución de tareas matemáticas, aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes, etc.

2.3. Modelo de clasificación de errores según Astolfi (1999)

Categorías propuestas:

- A1) *Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo*. Surgen por la dificultad que tienen los alumnos para comprender los enunciados de las actividades o situaciones problemáticas propuestas.
- A2) *Errores como resultado de hábitos escolares o de una mala interpretación de las interpretaciones*. Los alumnos en la escuela incorporan hábitos tales como creer que el problema propuesto se resuelve solo utilizando los nuevos conceptos aprendidos, no responder conforme a su propio razonamiento, sino a lo que piensan que el profesor espera que se haga, desconfiar cuando no obtienen un número simple como resultado, dar respuestas mecánicas sin razonar por la viabilidad y la lógica de la misma, etc.
- A3) *Errores como resultado de las concepciones alternativas de los estudiantes*. Este tipo de error está vinculado con los obstáculos (planteados por Brousseau), es decir, el alumno se equivoca porque tiene arraigado un conocimiento o un procedimiento que lo condujo a una respuesta exitosa en el pasado, pero que ya no le sirve.
- A4) *Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas*. En algunas ocasiones las operaciones que el alumno tiene que poner en funcionamiento no están disponibles en él, bien porque su nivel de desarrollo cognitivo aún no se lo permite, bien porque haya un retraso o

alguna dificultad en su adquisición. En estos casos el alumno no consigue dar una respuesta correcta.

- A5) *Errores en los procesos adoptados*: Surgen cuando el alumno decide apartarse del método dado en clase y utiliza otro procedimiento.
- A6) *Errores debidos a una sobrecarga cognitiva de la actividad a realizar*: Hay tareas que exigen poner en funcionamiento la memoria de trabajo porque es de realización inmediata. No hay tiempo para pensar, buscar información, corroborar datos, etc. En estos casos, un incremento de la complejidad de la tarea puede hacer que el sujeto no pueda dar respuesta a tantos frentes.
- A7) *Errores que tienen su origen en otra disciplina*: Estos errores surgen por el desconocimiento de contenidos correspondientes a otras disciplinas necesarios para dar respuesta a la tarea propuesta.
- A8) *Errores causados por la complejidad propia del contenido*: La resolución de toda situación problemática implica realizar un esfuerzo cognitivo que variará según la complejidad de la misma. Una tarea es más compleja mientras más habilidades se exijan para su resolución. Dichas habilidades están relacionadas con la capacidad de manejar, vincular y procesar contenidos estudiados. Las situaciones nuevas para el alumno son las que ponen en evidencia sus habilidades.

2.4. Modelo de clasificación de errores según Socas (1997)

Categorías propuestas:

- S1) *Errores que tienen su origen en un obstáculo*: Se considera al obstáculo como un conocimiento adquirido, no como una falta de conocimiento, que fue efectivo en algún contexto específico, pero que cuando el alumno utiliza dicho conocimiento en otro contexto, da lugar a respuestas inadecuadas.
- S2) *Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido*: Estos pueden dividirse en tres clases:
 - ✓ errores que tienen su origen en la aritmética, resultado de no haber asimilado relaciones y procesos en un contexto aritmético,
 - ✓ errores de procedimiento, es decir se producen cuando los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas, definiciones o reglas y
 - ✓ errores debidos a la mala interpretación del lenguaje matemático.
- S3) *Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales*: Estos errores derivan de la falta de concentración, bloqueos, olvidos, etc.

3. Metodología

En el presente trabajo se ha realizado un diagnóstico del tipo de errores que aparecen en la resolución de problemas en geometría básica vinculados a la agronomía, por los alumnos del Ciclo de Conocimientos Iniciales perteneciente a la carrera de Ingeniería Agronómica (Universidad Nacional de Córdoba).

Con el fin de analizar la variación del tipo de errores cometidos por los estudiantes antes y después del dictado de la materia Introducción a la Matemática, se evaluaron dos comisiones al comenzar y dos comisiones al finalizar el curso. Los temas abordados en dicha asignatura son: conjuntos, conjuntos de números, porcentaje, cálculo de áreas y ecuaciones, destacando fundamentalmente las aplicaciones agronómicas de cada uno.

El relevamiento de los errores se realizó mediante una evaluación diagnóstica en la que se expuso una situación problemática y seis preguntas a resolver vinculadas con dicha situación. La resolución de la evaluación diagnóstica fue realizada de forma escrita, entregando tanto las respuestas como los cálculos y procedimientos desarrollados (el instrumento se incorpora como anexo).

Se consideró una muestra de 100 alumnos antes del Ciclo de Conocimientos Iniciales (50 alumnos en cada comisión) y de 85 alumnos al finalizar el mismo (40 alumnos en una comisión y 45 en la otra).

Para el análisis de las evaluaciones se realizó un recuento de la frecuencia de los distintos tipos de errores según las clasificaciones de Socas, Movshovitz, Radatz y Astolfi.

Con el objetivo de una mejor visualización de los datos obtenidos se realizaron gráficos comparativos de la distribución de los tipos de errores distinguiendo los errores cometidos antes (que en la evaluación de resultados se registrarán como "antes") y después del dictado de la materia Introducción a la Matemática (aparecen como "después").

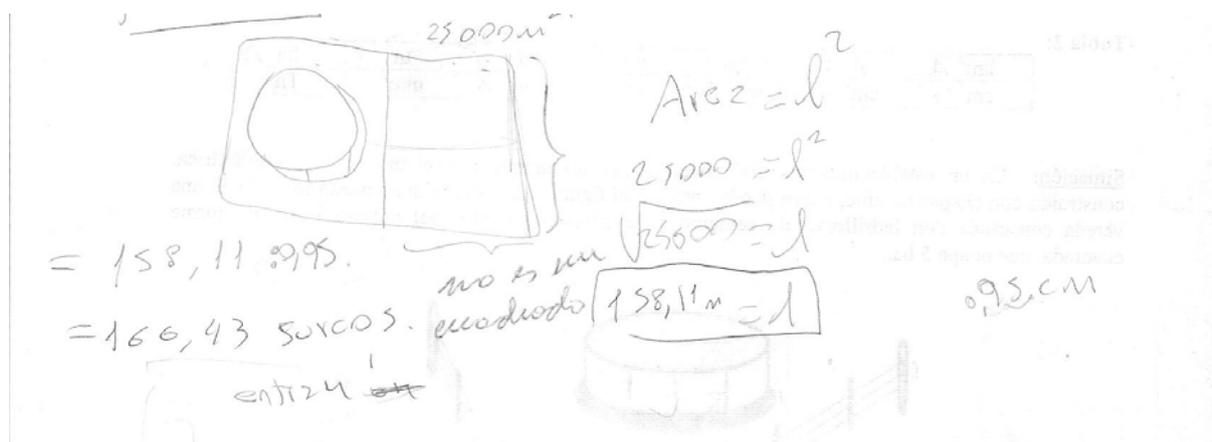
4. Resultados y discusión

En los resultados de las evaluaciones se observaron como errores en la resolución de la situación planteada, que se repitieron con mayor frecuencia, los siguientes:

- Utilizar datos de forma errónea.
- Inventar datos.
- Confundir el concepto involucrado en la resolución del ejercicio (confunden superficie con perímetro, diámetro con perímetro, asociar superficie de un área cualquiera con la superficie de un cuadrado).
- No relacionar el concepto con las unidades que le corresponden.
- Conversión incorrecta de unidades o bien operar sin tener en cuenta las unidades involucradas.
- Ante el desconocimiento de la fórmula apropiada inventar una.
- Realizar operaciones aritméticas de forma defectuosa.
- Usar regla de tres simple en ocasiones donde no es factible la aplicación de la misma.
- Operar sin relacionar con la situación planteada.
- No comprender el enunciado del problema.

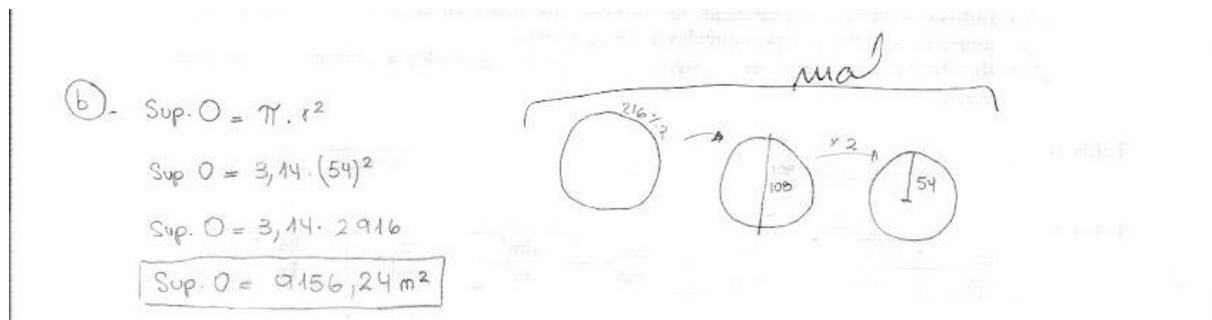
A continuación se muestran dos de las situaciones planteadas y la resolución dada por dos de los alumnos evaluados

Si en la mitad del potrero, no ocupada por el tanque, sembramos verdura de hoja que requiere surcos con una distancia de 95 cm de separación entre los mismos ¿Qué cantidad de surcos se pueden realizar?



El error cometido puede encuadrarse en la clasificación de Socas como S1, en la clasificación de Movshovitz como M3, y en la clasificación de Astolfi como A3, A4 y A8.

¿Qué extensión queda cubierta por el tanque?



En este caso el error cometido puede clasificarse como S2 según Socas, como M4 según Movshovitz, como R3 según Radatz.

Cuando se categorizan los errores cometidos según las tipologías de Socas, Movshovitz, Radatz y Astolfi, por diferentes motivos, se encontraron categorías que no se correspondían con los errores registrados, entre ellas podemos citar:

En la tipología propuesta por Socas, debido a la modalidad empleada para la obtención de datos en este trabajo (forma escrita), no corresponde la categoría S3 "errores con origen en actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática".

En la clasificación de Radatz se encuentra la categoría R2 "errores debidos a dificultades para obtener información espacial", en este caso no se encontraron errores de este tipo porque la situación planteada no requería de una representación espacial.

Teniendo en cuenta la tipología de Astolfi, la categoría A7 "errores que tienen su origen en otra disciplina" no se consideró, pues para resolver la evaluación no era necesario tener conocimiento de alguna otra disciplina que no fuera la matemática. La categoría A5 "errores en los procesos adoptados" no fue tenida en cuenta ya que no existe una única manera de resolver problemas en matemática.

Debido a la estructura de la evaluación diagnóstica, es importante destacar que, para resolver las primeras cinco preguntas, el alumno solo debía conocer los conceptos involucrados y las fórmulas correspondientes a cada uno, mientras que la última pregunta: *Si en la mitad del potrero, no ocupada por el tanque, sembramos verdura de hoja que requiere surcos con una distancia de 95 cm de separación entre los mismos ¿Qué cantidad de surcos se pueden realizar?*, apuntaba a evaluar la capacidad de los estudiantes para aplicar conceptos geométricos en una situación real. Para resolver correctamente este inciso, el alumno debía poner en juego otro tipo de habilidades, hacer relaciones, comprender el enunciado e imaginar correctamente la situación. Es decir, quien intentaba resolver este problema tenía más probabilidades de cometer errores.

En las evaluaciones tomadas antes del dictado del curso, el 78% de los alumnos no realizó intento alguno por resolver este planteo, mientras que en las tomadas después del mismo solo el 41% dejó el ítem en blanco. Esto explica la aparición de algunos tipos de errores en los segundos exámenes que no se encontraron en los primeros.

La distribución de los errores que se clasifican según la tipología propuesta por Socas se presenta en el Cuadro 1:

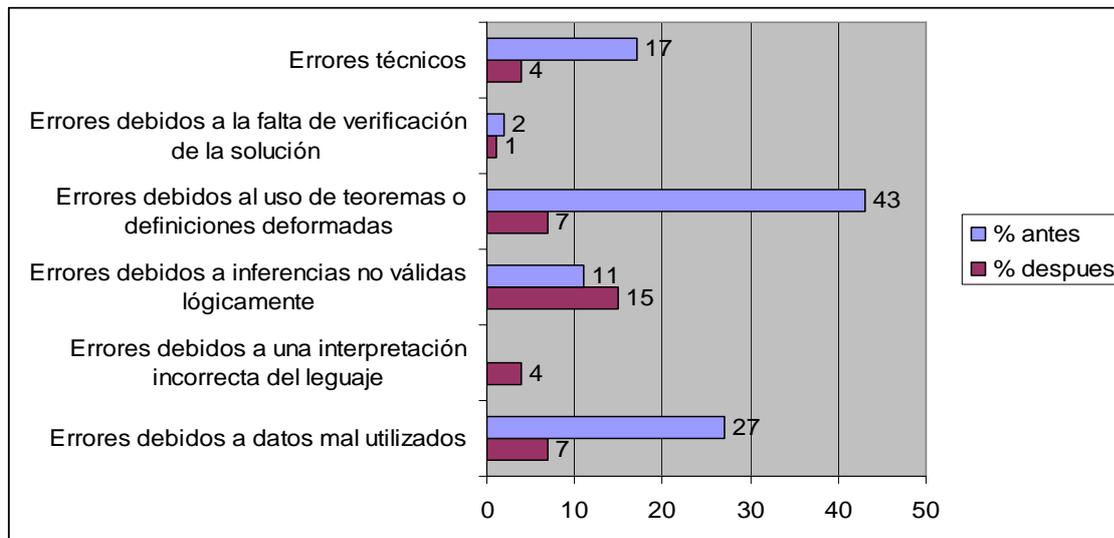
CUADRO 1
Comparación porcentual entre los errores cometidos por los alumnos antes y después del Ciclo de Conocimientos Iniciales según la tipología de Socas

Instancia	Tipo de Error	Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido	Errores que tienen su origen en un obstáculo
% antes		24 %	12 %
% después		13 %	15 %

En el Cuadro 1 se visualiza un pequeño incremento en el porcentaje de errores encontrados en las evaluaciones tomadas después del curso con respecto a las tomadas al comienzo del mismo en la categoría S2 "errores que tienen su origen en un obstáculo". Este incremento evidencia la dificultad que representa, para el alumno, superar este tipo de errores. También se puede observar que hubo una disminución del 11% en la categoría S1 "errores que tienen su origen en la falta de sentido" comparando las dos instancias de evaluación.

La frecuencia de los errores, según la clasificación de Movshovitz, cometidos por los alumnos puede apreciarse en el Gráfico 1.

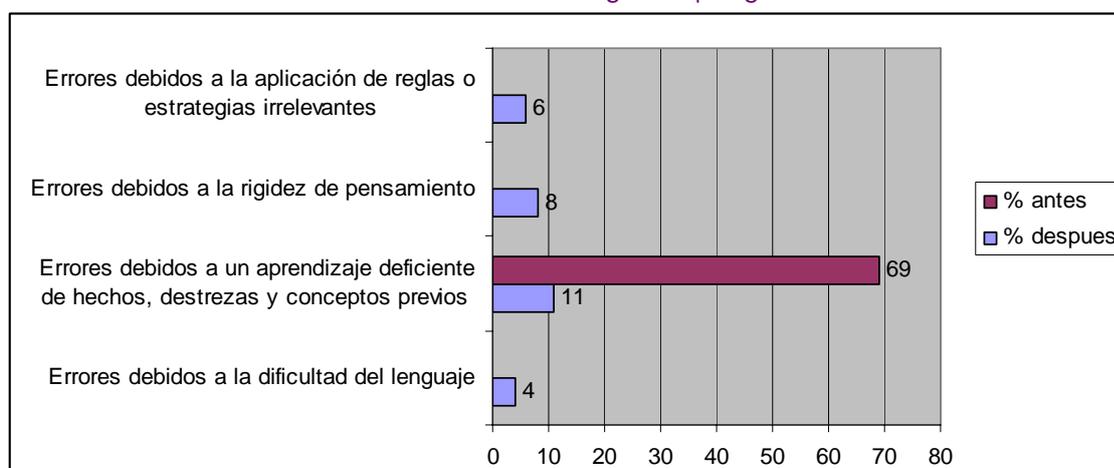
GRÁFICO 1
 Comparación porcentual entre los errores cometidos por los alumnos antes y después del Ciclo de Conocimientos Iniciales según la tipología de Movshovitz.



En este caso, si comparamos los exámenes tomados después del curso con los tomados antes del mismo, se puede ver una disminución en los errores debidos a los datos mal utilizados (M1), aquellos producidos por el mal uso de teoremas o definiciones (M4), los que surgen como consecuencia de la falta de verificación (M5) y los que se clasifican en la categoría M6 "errores técnicos". Se puede ver que los errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje (M2) aparecen únicamente en las evaluaciones tomadas al finalizar el curso, esto se debe al incremento de alumnos que intentan resolver el último ítem del examen pero no logran transformar el lenguaje coloquial en lenguaje matemático.

En el Gráfico 2 se encuentran los porcentajes de errores que se clasifican según la tipología propuesta por Radatz:

GRÁFICO 2
 Comparación porcentual entre los errores cometidos por los alumnos antes y después del Ciclo de Conocimientos Iniciales según la tipología de Radatz.

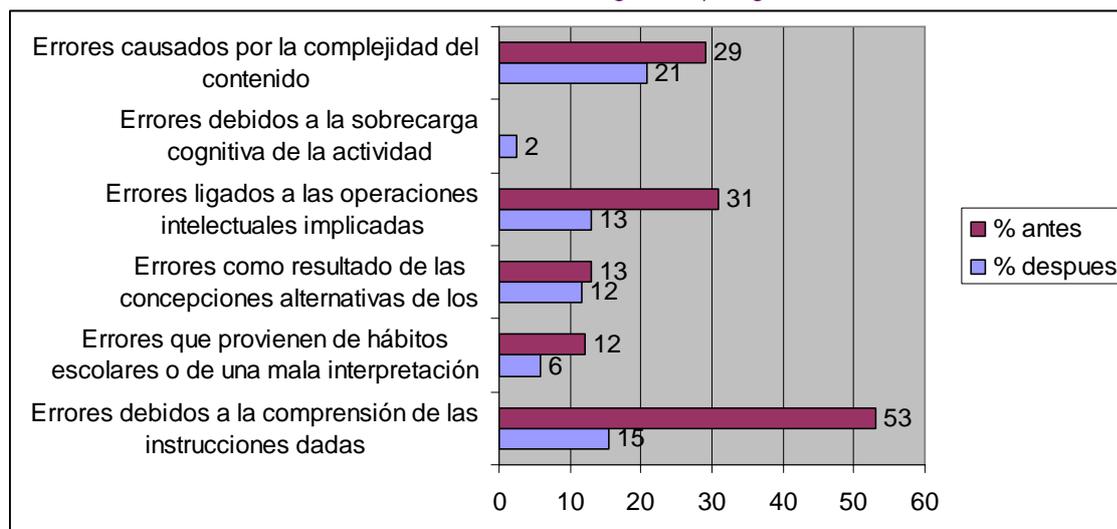


Es notable la diferencia en los porcentajes de cada categoría al comparar los obtenidos antes del curso con respecto a las evaluaciones del final del mismo. En las evaluaciones tomadas al comienzo solo se pudieron registrar errores debidos al aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos (R3), una posible causa puede encontrarse en la falta de conocimientos teóricos o ejercitaciones prácticas que no les permitió avanzar en la resolución de la situación planteada, por lo cual no se pudo detectar otra causa de error.

Sin embargo, se pudo observar una importante disminución en la frecuencia de los errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos al comparar el segundo examen con respecto al primero. Este decrecimiento, al igual que la disminución de los errores producto del uso deficiente de teoremas y definiciones (M4), puede atribuirse a que el trabajo realizado con los alumnos durante el curso de nivelación les permitió recordar, o aprender, los conceptos y fórmulas relacionadas con estos.

Por último se analizó la presencia de errores correspondientes a la tipología de Astolfi, que se presentan en el Gráfico 3:

GRÁFICO 3
Comparación porcentual entre los errores cometidos por los alumnos antes y después del Ciclo de Conocimientos Iniciales según la tipología de Astolfi.



Debemos destacar, no obstante, que al clasificar los errores que se comenten al resolver problemas del área de la geometría, según las tipologías propuestas por Socas, Movshovitz, Radatz y Astolfi, se observó que ninguna de dichas tipologías abarca el total de los errores encontrados.

La tipología de Socas no contempla los errores debido a datos mal utilizados, ni errores de cálculo o descuidos, tampoco se pueden clasificar los errores debidos a la mala interpretación del lenguaje, ni errores que surgen por la dificultad de la situación problemática, o debido al desarrollo cognitivo de los alumnos.

En cuanto a la tipología de Movshovitz, no fue posible ubicar los errores concernientes a la selección incorrecta de métodos o algoritmos para resolver un problema, ni los errores vinculados a la dificultad de la actividad o a la no disponibilidad de operaciones intelectuales que el alumno tiene que poner en funcionamiento para la resolución.

En las categorías propuestas por Radatz, no es posible clasificar los errores de cálculo o errores producto de olvidos, como tampoco son parte de esta tipología los errores causados por la complejidad del problema o la falta de madurez cognitiva por parte de los alumnos para resolver dicha actividad.

Finalmente, la propuesta de Astolfi, al no ser específica para errores en matemática, no permite considerar los errores de cálculo, ni los errores producto del uso deficiente de definiciones y teoremas o errores debidos a datos mal utilizados.

Por otra parte, se pudo observar que los alumnos tienen grandes dificultades para resolver situaciones problemáticas de la vida real, es decir, en muchas ocasiones, los estudiantes conocen las fórmulas y los procedimientos para resolver las distintas actividades dependiendo del concepto involucrado, pero cuando se plantea un problema en donde no se especifican fehacientemente los pasos a seguir los estudiantes no logran resolverlo con éxito y en muchos casos ni lo intentan.

Lampert, referenciado por Abrate *et al.* (2006), da una posible explicación para este suceso. Sostiene que el “saber” matemática, para los alumnos, está relacionado con seguir, recordar y aplicar las reglas que propone el docente. Esta creencia es adquirida en la escuela ya que, en general, la propuesta educativa consiste en que el alumno mire, escuche y practique. Lo anterior nos sugiere indagar si la causa de dicha problemática estará centrada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría que se desarrollan en el nivel medio, ya que no se estimula a los estudiantes a reflexionar sobre lo que hacen para que más tarde puedan aplicar lo aprendido a una situación problemática.

4. A modo de conclusión

Teniendo en cuenta las clasificaciones de errores propuestas por los distintos autores, podemos concluir que los alumnos han evolucionado favorablemente después del cursado de la asignatura Introducción a la Matemática ya que ha disminuido la presencia de errores y, principalmente, de aquellos que atañen al uso de conceptos, a la utilización de los mismos y al manejo de datos y definiciones.

Los resultados de este trabajo se constituyen en una nueva base para la tarea docente, principalmente para planificar el desarrollo de actividades en el tema. De hecho, a partir de los tipos y frecuencia de errores que cometen los alumnos se pueden proponer o rediseñar situaciones de enseñanza-aprendizaje que favorezcan a los estudiantes para sortear los obstáculos.

A modo de reflexión final se puede decir que el error no debería utilizarse únicamente como instancia a penalizar sino, por el contrario, como una guía que tiene el docente para reorientar el proceso de enseñanza-aprendizaje de modo que éste sea fructífero. Concluimos que es importante considerar el error como una oportunidad para que el estudiante medite y revea sus conocimientos, logrando, como consecuencia, una mejor comprensión del tema.

Bibliografía

ABRATE, R.; POCHULU, M.; VARGAS, J. (2006): *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. 1re ed. Universidad Nacional de Villa María. Buenos Aires, Argentina.

- ASTOLFI, J. P. (1999): *El "error", un medio para enseñar*. DIADA Editora. 1ra Edición. España.
- BROUSSEAU, G. (1983): Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathématiques". *Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble. Editorial La pensée sauvage : Vol 4 (2) pp.165-198.
- _____, (2007): *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. 1ra ed. Libros del Zorzal, Buenos Aires, Argentina.
- DEL PUERTO, S. M.; MINNAARD, C. L.; SEMINARA, S. A. (2006). "Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas". *Revista Iberoamericana de Educación*. Boletín Nº 38/4, Madrid, OEI <<http://www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf> > [Consulta: nov. 2008].
- ENGLER, A.; GREGORINI, M. I.; MÜLLER, D.; VRANCKEN, S.; HECKLEIN, M. (2004): "Los errores en el aprendizaje de matemática". *Revista Premisas*. Buenos Aires, Argentina. Ed: SOAREM. Año 6, Vol 23. pp. 23-32
- MONEREO, C.; CASTELLÓ, M.; CLARIANA, M.; PALMA, M.; PÉREZ, M. L. (1998): *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en el aula*, Ed. SEP/CE/Graó pp. 196, España
- MOVSHOVITZ-HADAR, N.; ZASLAVSKI, O.; INBAR, S. (1987). *An empirical classification model for errors in high school mathematics*. Journal for Research in Mathematics Education, 1987, Vol 18 (1), pp.3-14.
- RADATZ, H. (1979): *Error analysis in mathematics education*. Journal for Research in Mathematics Education, 1979, Vol 10 (3), pp.163-172.
- RICO, L. (1995): *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. En Kilpatrick, J.; Rico, L.; Gómez, P. (Ed). Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- SOCAS, M. (1997): *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria*. En Rico, L.; Castro E.; Coriat, M.; Martín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M.M. (Ed). La Educación Matemática en la Secundaria. ice-Horsori. pp 125-154.