

Un análisis de los errores de los alumnos en clases virtuales de geometría descriptiva bajo las teorías del desarrollo del pensamiento geométrico y del concepto figural

SANDRA DE SOUZA MELO
Docente e investigadora, Universidade Federal de Pernambuco, Recife – Brasil

1. Introducción

Varios son los puntos de vista donde uno comprende, estudia y trata el error, especialmente en función del abordaje psicológico desde el cual mira el aprendizaje. El error, en realidad, puede mostrar donde ha fallado el proceso de aprendizaje, en que nivel de pensamiento se encuentra el alumno, cuál es la idea que está presente en su raciocinio sobre el tema abordado.

Según Astolfi (1999), cada vez que un error es percibido, el profesor lo subraya, antes mismo de saber si eso tendrá alguna utilidad didáctica. Pero resalta que para conseguir erradicar errores en el raciocinio del alumno es necesario que estos errores aparezcan primero, y sólo después podremos tratarlos.

Además, Braviano et al (2001), consideran que las respuestas incorrectas, incompletas o deformantes de los alumnos no pueden dejar de ser tenidas en cuenta; pues la interpretación del mundo, de los hechos, de la causalidad, es realizada de forma diferente en los diversos estadios de desarrollo cognitivo.

El mismo Astolfi (2001), nos habla de la modificación de la categoría didáctica del error como consecuencia de la renovación contemporánea de la reflexión epistemológica, de un análisis institucional de la escuela, del fracaso escolar y del desarrollo actual de las investigaciones sobre los aprendizajes, la cognición y la memorización, lo que vemos muy esclarecedor de la posición actual que deberá ocupar el error en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

En el *plano de la elaboración de los saberes*, nos dice que, la filosofía, la historia de las ciencias y la epistemología contemporáneas han rehabilitado el error. Hoy día, se lo reconoce como un momento constitutivo de la línea de desarrollo científico y del progreso del conocimiento. Mientras que en el *plano del análisis institucional de la escuela* y del *fracaso escolar*, los trabajos, ya hoy clásicos, muestran que el fracaso o el éxito está muy ligado al medio sociocultural de los alumnos. Finalmente, en el *plano de la psicología del niño* y de *las investigaciones sobre los aprendizajes*, el error se analiza y re-sitúa en los modos de funcionamiento normal del pensamiento infantil, en especial en el proceso de asimilación y de acomodación descrito por Piaget (Astolfi, 2001).

2. La visión del error desde el punto de vista de las corrientes pedagógicas

Desde el punto de vista de la forma de considerar el error, Astolfi (2001), afirma que en pedagogía se ha pasado de una concepción del error que lo consideraba como una falta y que daba lugar a una

Revista Iberoamericana de Educación / Revista Ibero-americana de Educação
ISSN: 1681-5653

n.º 51/1 – 15 de diciembre de 2009

Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI)

Organização dos Estados Ibero-americanos para a Educação, a Ciência e a Cultura (OEI)



sanción, a una concepción nueva, donde el error es un testigo que permite descubrir las dificultades con las que tropieza el proceso de aprendizaje, y que lo esencial del trabajo didáctico gira en torno a su transformación.

“Un conflicto cognitivo se desarrolla cuando, en el interior de un individuo, surge contradicción o una incompatibilidad entre sus representaciones, sus acciones. Esta incompatibilidad, percibida como tal o, al contrario, manteniéndose inconsciente, da lugar a una tensión que puede desempeñar un papel motor en la elaboración de nuevas estructuras cognitivas. Sin embargo, hay muchas maneras de tratar mentalmente un conflicto cognitivo y no todas conducen a un progreso intelectual.” (Astolfi, 2001, p.39).

Según Astolfi (2001), siguiendo más allá de los piagetianos, donde el conflicto producto del progreso es un conflicto psicológico, que se deriva de las confrontaciones y contradicciones entre las acciones o previsiones del sujeto y lo observable o los resultados de su acción –superación del desequilibrio cognitivo intraindividual–, los neopiagetianos dicen que tales conflictos intraindividuales son necesarios, pero no pueden considerarse suficientes y que, en determinados momentos clave del desarrollo, la causa primera de los progresos individuales no hay que buscarla en las confrontaciones intraindividuales, sino en las confrontaciones interindividuales.

Aun señala que el efecto facilitador de la interacción social sobre el desarrollo individual se atribuye principalmente a su carácter conflictivo y a las oposiciones que ocasiona. Llama la atención sobre que la perspectiva sociocognitiva se integra en una teoría del desarrollo cognitivo en espiral, donde las interacciones sociales generan en el sujeto unas estructuras nuevas que, a su vez, le permiten ser sensible a unas interacciones sociales más complejas, y así sucesivamente.

Astolfi (2001), argumenta que si el pensamiento progresa mediante rupturas con un saber anterior, los progresos intelectuales que haya que obtener en el plano didáctico se corresponden con los saltos de obstáculos epistemológicos, psicológicos y metodológicos. Los verdaderos objetivos de la enseñanza científica corresponden, en realidad, a las transformaciones intelectuales que se derivan del salto de los obstáculos.

El cuadro siguiente reagrupa los diferentes estatus que puede tomar el error según los modelos pedagógicos analizados.

TABLA 1

Estatus del error (ASTOLFI, J. P. (1999). *El error, un medio para enseñar*. Sevilla: Diada. Pag.21)

	FALTA	FALLO DE PROGRAMA	OBSTÁCULO
ESTATUS DEL ERROR	Se niega el error “fallo” “disparate” “noimportanquismo”		El error positivo (postulado del sentido)
ORIGEN DEL ERROR	Responsabilidad del alumno, que debería impedirlo	Defecto de la programación	Dificultad objetiva en la apropiación del contenido enseñado
MODO DE TRATARLO	Evaluación a <i>posteriori</i> para castigarlo	Tratamiento a <i>priori</i> para prevenirlo	Trabajo <i>in situ</i> para tratarlo
MODELO PEDAGÓGICO DE REFERENCIA	Modelo Transmisivo	Modelo Conductista	Modelo Constructivista

Braviano et al (2001), analizan la visión del error desde las corrientes pedagógicas y señalan que para el modelo transmisivo, el error del alumno es destacado por el maestro, que dice donde el alumno erró y como él erró, siendo corregido a través de repeticiones, considerando al alumno como culpable de la ocurrencia del error; para la corriente conductivista, el error pasa a ser un elemento considerado en la evaluación para saber si los comportamientos finales deseados fueron adquiridos por los alumnos, considerando al error como un simple desperfecto de la programación, que deberá ser ajustada para que

dicho error no se repita; por su parte el modelo constructivista considera al error un referente que precisa ser corregido en el proceso de aprendizaje, las soluciones incorrectas, incompletas o distorsionadas de los alumnos no pueden dejar de ser tenidas en cuenta, considerando al error como una dificultad objetiva en la apropiación del contenido enseñado (Melo, 2008).

En nuestro análisis de los errores cometidos por los alumnos durante el proceso de aprendizaje de los contenidos de superficies de revolución, en clases virtuales, tomaremos como referencia la visión de dichos errores del modelo pedagógico constructivista, donde el error no tiene una visión punitiva, sino diagnóstica, buscando identificar en que punto se encuentra el alumno.

Desde este punto de vista los errores contribuyen con el sistema de evaluación, que debe ser considerado en 3 momentos: al principio: proceso diagnóstico; durante el desarrollo: proceso formativo; y al final: proceso de certificación. De hecho, destacamos la necesidad de que el docente tenga en cuenta la evaluación durante el proceso formativo, identificando los tipos de errores que cometen sus alumnos y auxiliándolo en la superación de dichos errores a partir de la utilización de las estrategias más adecuadas.

3. Los tipos de errores

Astolfi (1999), nos propone una tipología de los errores a partir de la cual podemos realizar un diagnóstico y adoptar las modalidades de intervención didáctica para hacerles frente, que van a ser muy distintas. A continuación, distinguiremos:

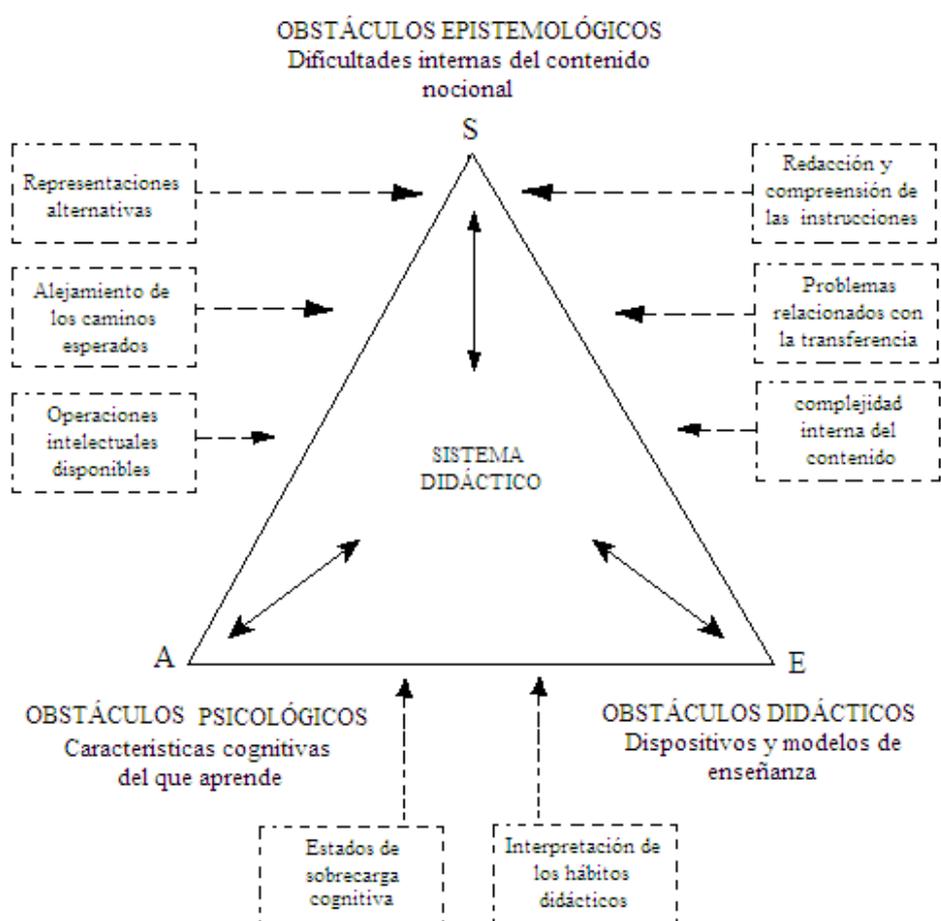
- Errores debidos a la *comprensión de las instrucciones* de trabajo dadas a la clase, en la medida en que los términos empleados para introducir ejercicios y problemas no son tan "transparentes" como imaginamos, y es que, la comprensión del léxico de cada disciplina está sembrada de "emboscadas".
- Errores que provienen de las *costumbres escolares* o de una *mala interpretación* de las expectativas, que tienen un papel esencial en la actividad cotidiana de la clase y en el 'oficio de alumno'.
- Errores que dan *testimonio de las concepciones alternativas* de los alumnos, que perduran a lo largo de la escolaridad y afloran en las producciones y respuestas de forma inesperada.
- Errores relacionados con las *operaciones intelectuales implicadas*, que pueden no estar disponibles en los alumnos y que, sin embargo, parecen 'naturales' al enseñante.
- Errores en los *recorridos empleados*, que pueden ser muy diversos, ya que el docente espera el uso de un procedimiento estándar, no llegando a comprender el camino o la intención del alumno.
- Errores debido a la *sobrecarga cognitiva* durante el ejercicio. La capacidad de trabajo es limitada y se subestima frecuentemente la carga cognitiva de la actividad.
- Errores que tienen su *origen en otra disciplina*, incomprendidos en la medida en que la transferencia de las competencias requeridas parece natural, cuando en verdad no lo es en absoluto.
- Errores causados por la *complejidad propia del contenido*, que no siempre es percibida como tal por los análisis de las disciplinas habituales ni en las programaciones que se realizan.

Astolfi presenta, de forma esquemática, el triángulo didáctico clásico (Figura 1.), donde aparecen asociados, en un mismo sistema, el Saber (S), el que Aprende (A) y el Enseñante (E) para visualizar gráfica y lógicamente la aparición de los errores. En dicho triángulo didáctico podemos visualizar en que aspecto de la relación enseñanza-aprendizaje pueden ocurrir los errores.

Dentro de los aspectos referentes al saber, encontramos lo que él denomina los obstáculos epistemológicos (dificultades internas del contenido nocional). Dentro de los aspectos del que aprende, encontramos los obstáculos psicológicos (características cognitivas del que aprende). Entre estos dos puntos del sistema didáctico, vemos que los errores que se pueden presentar son las “representaciones alternativas”, los “alejamientos de los caminos esperados” y finalmente las “operaciones intelectuales disponibles”. No debemos olvidarnos que para Astolfi la idea de obstáculo no tiene una visión negativa, sino positiva, pues la transposición de dicho obstáculo lleva al aprendizaje.

FIGURA 1

Triángulo didáctico (ASTOLFI, J P (1999). *El error, un medio para enseñar*. Sevilla: Diada. Pag.83)



Dentro de los aspectos referentes al enseñante, encontramos los obstáculos didácticos (dispositivos y modelos de enseñanza). Entre el saber y el enseñante, pueden ocurrir los errores relativos a la “redacción y comprensión de las instrucciones”, los “problemas relacionados con la transferencia”, la “complejidad interna del contenido”.

Entre el enseñante y el que aprende, los errores se presentan como los “estados de sobrecargas cognitiva” y la “interpretación de los hábitos didácticos”.

Los errores representan los niveles en los que se encuentran los alumnos y los indicativos de los caminos y estrategias que deberá tomar el enseñante para lograr el aprendizaje. Así que, el docente debe intervenir con mediaciones y remedios para actuar frente a estas situaciones propias del sistema didáctico.

Desde nuestra visión, como formadores de futuros maestros, juzgamos que en la formación inicial y continuada de dicho enseñante juega un papel importante el reconocimiento y el tratamiento de estos tipos de errores, que se presentan entre cada uno de estos aspectos del sistema didáctico.

4. El modelo de desarrollo del pensamiento geométrico según Van Hiele

El modelo de Van Hiele (1986; Crowley, 2005; Melo, 2008), explica como se produce la evolución de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico, dividiendo dicho desarrollo en 5 niveles:

- Nivel 0: Visualización: los estudiantes están conscientes del espacio sólo como algo que existe alrededor de ellos. Los conceptos geométricos se ven como entidades totales, consecuentemente, las figuras geométricas son reconocidas por su forma como un todo, o sea, por su apariencia física y no por sus partes o propiedades. Se puede aprender un vocabulario geométrico, identificar formas y, dada una figura, reproducirla.
- Nivel 1. Análisis Descriptivo: comienza un análisis de los conceptos geométricos. La forma retrocede y surgen las propiedades de las figuras. A través de la observación y la experimentación, los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras. Estas propiedades que surgen se usan para conceptualizar clases de formas, donde las figuras tienen partes y son reconocidas mediante ellas.
- Nivel 2. Deducción informal: se pueden establecer las interrelaciones en las figuras (en un cuadrilátero, para que los lados opuestos sean paralelos, es necesario que los ángulos opuestos sean iguales) y entre figuras (un cuadrado es un rectángulo porque tiene todas sus propiedades). Las definiciones adquieren significado.
- Nivel 3. Deducción formal: se entiende el significado de la deducción como una manera de establecer una teoría geométrica o un sistema de axiomas. Postulados, definiciones, teoremas y demostraciones son captadas. Se pueden construir, y no solo memorizar, demostraciones, percibir la posibilidad del desarrollo de una prueba de varias maneras, entender la interacción de condiciones necesarias y suficientes y distinguir entre una afirmación y su recíproca.
- Nivel 4. Rigor: el aprendiz puede trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos. Pueden estudiarse geometrías no euclidianas y compararse diferentes sistemas, pues la geometría se capta de forma abstracta. Se analizan diversos sistemas deductivos con un grado de rigor y se comprenden las propiedades de que puede gozar un sistema deductivo.

Subrayamos aquí las ideas de Fischbein (1993), donde él defiende una de las propiedades que caracteriza a las formas geométricas y que, además, está relacionada con su naturaleza conceptual: las propiedades de las figuras geométricas son impuestas por o derivadas de definiciones en el dominio de un cierto sistema axiomático. Desde este punto de vista, una figura geométrica tiene una naturaleza conceptual. Tales ideas se pueden sumar a las ideas de los niveles de desarrollo de Van Hiele (1986) respecto a la subordinación que los niveles siguientes tienen de los niveles anteriores, pues el reconocimiento inicial (visual) de las formas, evoluciona a partir de la asimilación del concepto.

Una figura geométrica puede ser descrita como poseedora de propiedades *intrínsecamente* conceptuales (Mariotti & Fischbein, 1997). No obstante, una figura geométrica no es un mero concepto. Es una imagen, una imagen visual. Posee una propiedad que los conceptos usuales no poseen, a saber,

incluye la representación mental de propiedad espacial. Una vez más, encontramos la idea de subordinación de los niveles respecto al intrínseco vínculo visualización-definición. Pero aquí, una visualización más amplia, una visualización mental.

Para Fischbein (1993), los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entidades mentales, llamadas por él *conceptos figurales*¹, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales como: idealidad, abstracción, generalidad y perfección.

5. Propiedades del modelo de Van Hiele

Además de proporcionar nociones sobre las ideas que corresponden específicamente a cada nivel de pensamiento geométrico, el matrimonio Van Hiele (1986), identificó algunas generalidades que caracterizan al modelo (Crowley, 2005):

- Secuencial: una persona debe avanzar en orden a lo largo de los niveles. Para desempeñarse con éxito en un nivel particular, un aprendiz debe haber asimilado las estrategias de los niveles precedentes.
- Ascenso: pasar o no de un nivel a otro depende más del contenido y de los métodos de instrucción recibidos que de la edad. Ningún método de instrucción lleva a un estudiante a saltar un nivel, algunos incrementan los progresos, mientras que otros retardan o incluso previenen un movimiento entre niveles.
- Intrínseco y extrínseco: los objetos inherentes a un nivel se convierten en objetos de estudio en el siguiente. Por ejemplo, en el nivel 0 sólo la forma de una figura es percibida. Dicha forma, por supuesto, determinada por sus propiedades, pero sólo cuando se alcanza el nivel 1, ella es analizada y sus componentes y sus propiedades son descubiertos.
- Lingüístico: "cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones para conectar esos símbolos". Así, una relación que es "correcta" en un nivel puede ser modificada en otro (la inclusión de un grupo, por ejemplo, un cuadrado es también un rectángulo, y un paralelogramo).
- Falta de concordancia: si un estudiante está en un nivel y la instrucción que recibe en otro, el aprendizaje y el progreso deseado pueden no ocurrir. En particular si el maestro, los materiales instruccionales, el contenido, el vocabulario y demás aspectos, están en un nivel más alto, al estudiante no le será posible seguir el proceso de pensamiento empleado.

Al avanzar en el desarrollo de los niveles, los alumnos pasan a pensar en las formas o entidades geométricas como conceptos figurales, pues la asimilación correcta de tales figuras exigirá que se perciba la imposición del concepto sobre dichas formas.

Asimismo, Fischbein (1993), afirma que se necesita un esfuerzo intelectual a fin de entender que las operaciones matemático-lógicas manipulan sólo una versión purificada de la imagen, el contenido espacio-figural de la imagen. Sin embargo, dichas operaciones se manifiestan, físicamente, como imágenes dibujadas sobre una superficie (papel) o sobre la pantalla de un ordenador. No obstante, el significado queda más allá de la materialidad de la propia palabra o símbolo que lo denomina, de la palabra expresada: el significado es una idea figurada por un complejo de relaciones. "*El concepto figural es*

¹ Fishbein define el concepto figural como una realidad mental, como el constructo manejado por el razonamiento matemático en el dominio de la geometría. Está desprovisto de cualquier propiedad concreta-sensorial (como color, peso, densidad, etc) pero exhibe propiedades figurales.

también significado. La particularidad de este tipo de significado es que incluye la figura como una propiedad intrínseca" (p. 08).

Según Fischbein (1993), figuras conflictivas deben ser utilizadas en las clases para enfatizar el predominio de la definición sobre la figura en el uso y la interpretación del concepto figural. El estudiante debe ser alertado del conflicto y su fuente a fin de enfatizar, en su mente, la necesidad de contar con el razonamiento matemático en las limitaciones formales.

Fischbein (1993), concluye que los procesos de construcción de conceptos figurales en la mente del estudiante no deberían ser considerados como un efecto espontáneo de los cursos usuales de geometría. El maestro, y todo lo que influye o puede influir en este proceso educativo, deben conducir al desarrollo de los aprendizajes. O sea, las interacciones con el contenido académico, interacciones socio-culturales e interacciones con objetos y con el entorno deben llevar al desarrollo de tal concepto (Melo, 2008).

Cuando una entidad geométrica es una imagen, una representación espacial, su existencia y sus propiedades son enteramente impuestas por una definición abstracta y formal. Nada es verdadero figuralmente que no sea verdadero y demostrado conceptualmente y viceversa (Fischbein, 1993). Por tal razón, creemos que el nivel (Van Hiele, 1986) siguiente se apoya en el anterior, pues para evolucionar en el conocimiento de la figura el alumno se basará en sus propiedades definidas, y refuerza la idea de que los niveles siguientes estén subordinados a los anteriores.

6. Análisis de la frecuencia de los errores

Para el análisis de los errores en las clases virtuales de geometría descriptiva, realizamos una investigación de tipo cualitativo, más precisamente un estudio de casos (Yin, 1994). Desde la observación de dichas clases virtuales, con una muestra intencional de alumnos de la carrera de maestro de dibujo, elegimos 6 casos que analizamos y presentamos aquí. Dentro del análisis de las clases son utilizados las actividades (dibujos) desarrolladas por dichos alumnos, donde verificamos la ocurrencia de los errores que analizamos dentro de la clasificación propuesta por Astolfi (1999), bajo las teorías del nivel de desarrollo del pensamiento geométrico (Van Hiele, 1986) y del concepto figural (Fischbein, 1993).

Veremos la frecuencia de los errores que presentaron los alumnos durante la realización de las actividades desarrolladas en las clases virtuales. Aquí, tenemos por objetivo verificar cuales son los errores que los estudiantes presentaron a la hora de resolver las tareas, ya que dichos errores son inherentes a la metodología del aprendizaje por descubrimiento.

Distinguiremos los errores en las tablas según se presenta a continuación:

- Comprensión de las instrucciones - CI
- Costumbres escolares o mala interpretación - CEMI
- Testimonio de las concepciones alternativas de los alumnos - TCA
- Operaciones intelectuales implicadas – OII
- Recorridos empleados – RE
- Sobrecarga cognitiva – SC
- Origen en otra disciplina - OOD
- Complejidad propia del contenido - CPC

Además, añadimos a las tablas las categorías: no enviado (caso en que el alumno no envió la tarea en ninguna hipótesis) y no hubo (caso en que el alumno realizó uno de los intentos con error, pero no realizó

otro intento). En general, los alumnos realizaron dos intentos de contestar las actividades. Sin embargo, hay casos donde sólo hubo un intento (con o sin error) y también casos de tres intentos. A continuación se presentan las tablas con las frecuencias de los errores en las actividades, analizadas a partir de los intentos realizados por los alumnos en la resolución de dichas actividades en las clases virtuales.

TABLA 2 – Frecuencia de los errores de los casos en las actividades

Casos analizados					
Caso Alumno1		Caso Alumno2		Caso Alumno3	
Actividad cono1 1º intento - Oll 2º intento – sin error.	Actividad elipsoide2 1º intento – sin error	Actividad cono1 1º e 2º intento – OOD	Actividad elipsoide2 1º intento – Oll y OOD 2º intento – sin error.	Actividad cono1 1º intento – sin error	Actividad elipsoide2 1º intento – sin error
Actividad cono2 1º intento – Cl 2º intento – Cl	Actividad elipsoide3 1º intento – OOD 2º intento – sin error	Actividad cono2 1º intento – OOD 2º intento – sin error.	Actividad elipsoide3 1º intento – Oll y OOD 2º intento – sin error.	Actividad cono2 1º intento – sin error	Actividad elipsoide3 1º intento – sin error
Actividad cono3 1º intento – OOD y Oll 2º intento – sin error	Actividad paraboloide1 1º intento – Oll	Actividad cono3 1º intento – Cl y Oll 2º intento – no hubo	Actividad paraboloide1 1º intento – Oll y OOD 2º intento – Oll	Actividad cono3 1º intento – OOD 2º intento – no hubo	Actividad paraboloide1 1º intento – Oll 2º intento – sin error
Actividad cilindro1 1º intento - Oll 2º intento – sin error	Actividad paraboloide3 1º intento – OOD 2º intento – sin error	Actividad cilindro1 1º intento – RE 2º intento – sin error.	Actividad paraboloide2 1º intento – OOD 2º intento – sin error.	Actividad cilindro1 1º intento –RE 2º intento – sin error	Actividad paraboloide2 1º intento – sin error
Actividad cilindro2 1º intento – Cl y OOD 2º intento – Oll	Actividad hiperboloide1 1º intento – sin error.	Actividad cilindro2 1º intento – OOD y RE 2º intento – OOD	Actividad paraboloide3 1º intento – sin error.	Actividad cilindro2 1º intento – OOD y Oll 2º intento – Oll	Actividad paraboloide3 1º intento – sin error
Actividad cilindro3 1º intento – sin error	Actividad hiperboloide2 1º intento – sin error.	Actividad cilindro3 1º intento – OOD 2º intento – sin error.	Actividad hiperboloide1 1º intento – sin error	Actividad cilindro3 1º intento –sin error	Actividad hiperboloide1 1º intento – sin error
Actividad esfera1 1º intento – sin error	Actividad hiperboloide3 1º intento – RE 2º intento – sin error.	Actividad esfera1 1º intento – OOD 2º intento – no hubo.	Actividad hiperboloide2 1º e 2º intento – OOD	Actividad esfera1 1º intento – Oll 2º intento – OOD	Actividad hiperboloide2 1º intento – Cl y OOD 2º intento – sin error
Actividad esfera2 1º intento – sin error	Actividad toro1 1º intento – Cl y OOD 2º intento – OOD	Actividad esfera2 1º intento – OOD 2º intento – sin error.	Actividad hiperboloide3 1º intento – OOD 2º intento – no hubo	Actividad esfera2 1º intento – sin error	Actividad toro1 1º intento – sin error
Actividad esfera3 1º intento – sin error	Actividad toro2	Actividad esfera3 1º intento – sin error.	Actividad toro1 1º intento – OOD 2º intento – no hubo	Actividad esfera3 1º intento – sin error	Actividad toro2 1º intento – sin error
Actividad elipsoide1 1º intento – Cl y Oll 2º intento – sin error.		Actividad elipsoide1 1º e 2º intento – Oll	Actividad toro2 1º intento – Oll 2º intento – no hubo	Actividad elipsoide1 1º intento – sin error	

TABLA 2 – Frecuencia de los errores de los casos en las actividades (continúa)

Casos analizados (continuación)					
Caso Alumno5		Caso Alumno9		Caso Alumno10	
Actividad cono1 1º intento – Oll 2º intento – no hubo	Actividad elipsoide1 1º intento – OOD 2º intento – no hubo	Actividad cono1 e cono2 1º intento – no enviado	Actividad elipsoide2 1º intento – no enviado	Actividad cono1 e cono2 1º intento – sin error	Actividad elipsoide2 1º intento – Oll y OOD 2º intento – sin error
Actividad cono2 1º intento – OOD 2º intento – no hubo	Actividad elipsoide2 1º intento – Oll y OOD 2º intento – no hubo	Actividad cono3 1º intento – Oll 2º intento – no hubo	Actividad elipsoide3 1º intento – no enviado	Actividad cono3 1º intento – no enviado	Actividad elipsoide3 1º intento – sin error
Actividad cono3 1º intento – no enviado	Actividad elipsoide3 1º intento – OOD 2º intento – no hubo	Actividad cilindro1 1º intento – Oll y RE 2º intento – sin error	Actividad paraboloide1 1º intento – Cl y OOI 2º intento – no hubo	Actividad cilindro1 1º intento – Oll y RE 2º intento – Oll 3º intento – sin error	Actividad paraboloide1 1º intento – Oll 2º intento – sin error
Actividad cilindro1 1º intento – RE y Oll 2º intento – no hubo	Actividad paraboloide1 1º intento – no enviado	Actividad cilindro2 1º intento – Oll 2º intento – Oll y OOD 3º intento – sin error	Actividad paraboloide2 1º intento – no enviado	Actividad cilindro2 1º intento – OOD 2º intento – Oll 3º intento – sin error	Actividad paraboloide2 1º intento – sin error
Actividad cilindro2 1º intento – Oll y OOD 2º intento – no hubo	Actividad paraboloide2 1º intento – no enviado	Actividad cilindro3 1º intento – no enviado	Actividad paraboloide3 1º intento – Oll 2º intento – no hubo	Actividad cilindro3 1º e 2º intento – Oll 3º intento – no hubo	Actividad paraboloide3 1º intento – OOD 2º intento – sin error
Actividad cilindro3 1º intento – Oll y Cl 2º intento – no hubo	Actividad paraboloide3 1º intento – no enviado	Actividad esfera1 1º intento – OOD 2º intento – no hubo	Actividad hiperboloide1 1º intento – Oll 2º intento – no hubo	Actividad esfera1 1º intento – Oll 2º intento – OOD 3º intento – sin error	Actividad hiperboloide1 1º e 2º intento – Oll 3º intento – sin error
Actividad esfera1 1º intento – OOD y Oll 2º intento – no hubo	Actividad hiperboloide1 1º intento – Oll y OOD 2º intento – no hubo	Actividad esfera2 1º intento – no enviado	Actividad hiperboloide2 1º intento – OOD 2º intento – sin error	Actividad esfera2 1º intento – Oll 2º intento – OOD 3º intento – sin error	Actividad hiperboloide2 1º e 2º intento – Oll 3º intento – no hubo
Actividad esfera2 1º intento – OOD 2º intento – no hubo	Actividad hiperboloide2 1º intento – Oll 2º intento – no hubo	Actividad esfera3 1º intento – Oll 2º intento – sin error	Actividad hiperboloide3 1º intento – no enviado	Actividad esfera3 1º intento – Oll y OOD 2º intento – no hubo	Actividad hiperboloide3 1º intento – no enviado
Actividad esfera3 1º intento – no enviado	Actividad hiperboloide3 1º intento – no enviado	Actividad elipsoide1 1º intento – RE 2º intento – no hubo	Actividad toro1 1º intento – Cl 2º intento – no hubo	Actividad toro1 1º intento – Oll y OOD 2º intento – no hubo	Actividad toro1 1º intento – Oll 2º intento – sin error
	Actividades toro1 e toro2 1º intento – no enviado		Actividad toro2 1º intento – no enviado	Actividad elipsoide1 1º intento – Oll 2º intento – OOD 3º intento – sin error	Actividad toro2 1º intento – Oll 2º intento – sin error

A continuación, sintetizamos el análisis de los errores que se verificaron como más frecuentes en nuestro estudio, con base en las teorías de Van Hiele (1986) y Fischbein (1993).

El error del tipo de comprensión de las instrucciones (CI), tuvo un modesto índice de superación. Dicho error está relacionado con el que Van Hiele (1986), presenta como una de las características del modelo de desarrollo del pensamiento geométrico llamada "lingüística". Eso quiere decir que cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones para conectar esos símbolos. Este tipo de relación hace que los enunciados de una cuestión puedan no ser claros para el estudiante que empieza a desarrollar el nivel. Aun así, vemos que al usar el lenguaje cercano al alumno aprovechando sus ideas previas, este error tuvo la menor frecuencia entre los tipos detectados.

Los errores del tipo de las operaciones intelectuales implicadas (OII) casi siempre fueron superados. Verificamos que donde no ocurre dicha superación se comprueba que el alumno se mantuvo en el nivel de la visualización de la forma (Van Hiele, 1986), no pasando a percibir la subordinación de dicha forma a su concepto, o más bien dicho, concepto figural (Fischbein, 1993). Consideramos como lógica la incidencia de dicho error al tratarse del desarrollo del pensamiento geométrico donde, para llegar a niveles más abstractos, la evolución parte del nivel visual, sin olvidarnos que el concepto figural nos plantea la insolubilidad forma/concepto como fundamento para los procedimientos empleados en la resolución de las actividades.

Astolfi (1999), advierte que a una misma operación resolutive pueden corresponder operaciones lógicas extremadamente distintas desde el punto de vista del esfuerzo de abstracción que involucran. Dicha complejidad demanda de los estudiantes una asimilación desde el concepto figural (Fischbein, 1993) de dichas superficies para el desarrollo de los niveles del pensamiento geométrico (Van Hiele, 1986).

Como verificamos aquí, el error que no logró superación, en muchos casos, fue el que tiene origen en otra disciplina (OOD). Cuando se coloca a los estudiantes en dos situaciones y disciplinas diferentes (inclusive en la misma), la semejanza superficial desempeña un papel fundamental (Astolfi, 1999). Muchas veces no basta con que sean estructuralmente cercanas para provocar en los alumnos la movilización de procedimientos utilizados con anterioridad o, incluso, disponibles en la memoria. Por muy natural que parezca, no piensan en establecer una relación. Además, otra característica del modelo de Van Hiele (1986), es que este se presenta como "intrínseco y extrínseco", o sea, los objetos inherentes a un nivel se convierten en objetos de estudio en el siguiente.

El error de tipo de recorrido empleado (RE) presentó el segundo menor índice de incidencia. En 4 (cuatro) de los casos dicho error sólo ocurre una vez y en 2 (dos) de ellos, dos veces. Este error se presenta en 5 (cinco) de los casos en la misma cuestión: la intersección de dos cilindros de mismo diámetro, presentada en la actividad a través de una conexión de tuberías. Estos 5 alumnos dan la respuesta en su primer intento sin presentar el trazado de obtención de la intersección. Todos ellos, al principio, se basaron en su reconocimiento visual y perceptivo, sin considerar el aspecto de la definición de las superficies que exigiría el conocimiento de sus generatrices para llegar correctamente al trazado de los puntos de la intersección. Sin embargo, al final, dicho error presentó una buena media de superación.

7. Conclusiones

Tal como se ha planteado anteriormente, la existencia de dichos errores es inherente a la metodología de enseñanza utilizada, y su presencia es tomada no como un obstáculo no transponible al proceso sino como unas etapas por las que hay que pasar para llegar al nivel siguiente.

En el caso de los errores del tipo de las operaciones intelectuales implicadas (OII) verificamos que donde no ocurre dicha superación se comprueba que el alumno se mantuvo en el nivel de la visualización de la forma (Van Hiele, 1986), no pasando a percibir la subordinación de dicha forma al concepto figural (Fischbein, 1993). De hecho, la superación de este error parte del entendimiento de los conceptos (de las bases) teóricos que dictarán las operaciones procedimentales para la realización de las tareas. Así que, al guiar las discusiones de las actividades a través del intento del uso de las estrategias heurísticas, se busca que el alumno vaya aprehendiendo los aportes teóricos que lo lleven al éxito en la realización de la tarea y, consecuentemente, el aprendizaje. Asimismo, los alumnos que se adaptan mejor a estos tipos de estrategias muestran una mayor superación de los errores OII o, incluso, la no existencia de errores, llegando al éxito en su primer intento.

Los errores que tiene origen en otra disciplina (OOD) no parecen estar relacionados con los propios resultados que encontramos en la prueba de procedimientos geométricos, realizada al inicio del experimento, pues ahí constatamos que el nivel que los alumnos presentaban respecto a los contenidos sirve de base para el aprendizaje de los contenidos impartidos en las clases virtuales. Astolfi (1999), advierte que cuando se coloca a los estudiantes en dos situaciones y disciplinas diferentes (incluso en la misma), el parecido superficial desempeña un papel esencial. Así que, la mayor parte de las veces, no basta con que sean estructuralmente cercanas para provocar en los alumnos la movilización de herramientas de pensamiento utilizadas con anterioridad o incluso, disponibles en la memoria. No se trata de que sean incapaces, pero no piensan en establecer una relación, por muy natural que parezca. En este sentido, las estrategias heurísticas favorecerían que el alumno efectuara la transferencia de *saberes* anteriores, oriundos de otras asignaturas, y al no ser capaces, ocurrían dichos errores.

Los errores de comprensión de las instrucciones (CI) están relacionados con la idea de Van Hiele (1986), de que cada nivel presenta un lenguaje propio y que el alumno necesita familiarizarse con el lenguaje del nuevo nivel al que está intentando acceder a través del aprendizaje del contenido. La discusión de la resolución de las actividades donde se busque presentar y profundizar los contenidos, favorece que este tipo de error no ocurra, pues el lenguaje propio del nivel de los contenidos geométricos podrá ser introducido a partir de las ideas iniciales de los alumnos. Además, hacer que los propios alumnos sean llevados a identificar *qué* se pide en el problema y *qué* conocimientos son necesarios para solucionarlo, minimizará su incidencia.

El error de recorrido empleado (RE) se presenta en 5 (cinco) de los casos en la misma cuestión. Todos ellos, al principio, se basaron en su reconocimiento visual y perceptivo sin considerar el aspecto de la definición de las superficies que exigiría el conocimiento de sus generatrices para llegar correctamente a dicha intersección. Según Medeiros & Medeiros (2001), nadie puede verse libre de sus experiencias pasadas. Sin embargo, a los sujetos se les pide, en la resolución de problemas, evitar que dichas experiencias sobrecarguen su pensamiento con un único punto de vista. En este caso, el aspecto visual (Nivel 0) tendría que ser relegado dando espacio a los niveles siguientes que posibilitan la resolución precisa de la actividad.

Una vez más, volvemos a subrayar que el error, aquí, no tiene una visión punitiva sino que diagnóstica de en qué punto se encuentra el alumno. La identificación del error, volvemos a hacer hincapié, inherente al aprendizaje por descubrimiento, auxilia al profesor en la elección de estrategias que puedan llevar el alumno al nivel siguiente.

Además, los errores contribuyen en el sistema de evaluación, que debe ser considerado en tres momentos: al principio – proceso diagnóstico; durante el desarrollo – proceso formativo; y al final de la materia – proceso de certificación. De este modo, en nuestra investigación, los errores que analizamos fueron verificados en el proceso formativo, o sea durante el desarrollo. De hecho, destacamos la necesidad de que el maestro tenga en cuenta la evaluación durante el proceso formativo, identificando el tipo de error que cometen sus alumnos en tareas específicas y auxiliándolos para la superación de dichos errores a partir de la utilización de las estrategias más adecuadas.

Bibliografía

- ASTOLFI, J. P. (1999). *El error, un medio para enseñar*. Sevilla: Diada.
- ASTOLFI, J. P. (2001). *Conceptos clave en la didáctica de las disciplinas*. Sevilla: Díada Editora. Serie Fundamentos nº 17, Colección Investigación y Enseñanza.
- BRAVIANO, G.; ZIMMER, I.; FREITAS, A. (2001, junio). *Tratamento de Erros do Aprendiz no Desenho Geométrico Virtual*. Trabajo presentado en GRAPHICA2001 -15º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico/IV International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design, São Paulo, Brasil.
- CROWLEY, M. L. (2005): "El modelo Van Hiele de desarrollo de pensamiento geométrico", en: http://www.hemerodigital.unam.mx/ANUIES/upn/vol13/sec_84.html (Consulta: agosto. 2005).
- FISCHBEIN, E. (1993). "The theory of figural concepts", *Educational Studies in Mathematics*, 24(2): 139-162.
- MARIOTTI, M.A. & FISCHBEIN, E. (1997). "Defining in classroom activities", *Educational Studies in Mathematics*: 34, 219-248.
- MEDEIROS, C. F. & MEDEIROS, A. (2001). Investigando fixações e harmonias ilusórias na aprendizagem da ciencia. En MEDEIROS, C. F.; MEDEIROS, A. (orgs), *O concreto-abstrato na educação em física e matemática* (pp. 11-22). Recife: UFRPE, Imprensa Universitária.
- MELO, S. de S. (2008). *Estudio pedagógico de la enseñanza virtual de la geometría, desde un enfoque socio-constructivista*. Tesis Doctoral presentada para obtención del grado de Doctora en Pedagogía, Departamento de Teoría e Historia de la Educación, Facultad de Educación, Universidad de Salamanca, Salamanca, España.
- VAN HIELE, P. M. (1986). *Structure and Insight – a theory of mathematics education*. Florida: Academic Press.
- YIN, R. K. (1994). *Case study research: Design and methods*. Applied Social Methods Series, Vol. 5. Newbury Park. California: Sage Publications.