

La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral desde la perspectiva del nuevo paradigma de la sociedad del conocimiento

ALEJANDRO ENRIQUE LOIS
LILIANA MARÍA MILEVICICH

Universidad Tecnológica Nacional, Argentina

Introducción

Francesc Pedró y Francisco Benavides (2007, p. 23) en su artículo sobre “Políticas educativas sobre nuevas tecnologías en los países iberoamericanos” se refieren a la importancia del uso de las TIC en cuanto a su potencialidad de favorecer la transformación de los sistemas escolares. En la mayor parte de estos países, investigadores y educadores se refieren a las herramientas tecnológicas como el componente decisivo para el cambio educativo y para el desarrollo de nuevos roles, tanto para los alumnos como para los profesores. En términos de los mismos autores: “Las tecnologías digitales han sido vistas como un elemento catalizador del cambio pedagógico que el nuevo paradigma de la sociedad del conocimiento parece urgir y que demanda la construcción de nuevos espacios y oportunidades para el aprendizaje...así como la redefinición de los roles ...”.

Por otra parte, en el contexto de la educación superior, existe una convicción generalizada entre docentes e investigadores sobre las dificultades para ofrecer una buena formación universitaria, ya que supone un cambio en los modelos de enseñanza-aprendizaje, en las metodologías, en las formas e instrumentos de evaluación, en el papel del profesor y del estudiante. Todo ello también implica un cambio en el desarrollo de los materiales de aprendizaje, para lo cual se debiera pautar la organización de los contenidos a partir de una labor de equipo interdisciplinaria.

La sociedad actual requiere que nuestros egresados universitarios no sean sólo expertos en una determinada materia, se pretende que hayan desarrollado múltiples habilidades, a la vez que una serie de características y competencias fundamentales tales como la capacidad de resolver problemas, de trabajar en equipo, las habilidades comunicativas, las habilidades para el aprendizaje autónomo y para la toma de decisiones, etc. Coincidimos con la observación de Isabel Álvarez en cuanto a que la formación de los estudiantes, para que sean capaces de desenvolverse en un contexto de colaboración y de permanente interacción social, donde además, el conocimiento necesario para resolver situaciones cambia constantemente, supone un desafío para la educación superior actual (Álvarez, 2005).

Numerosas publicaciones, investigaciones, actas de congresos y producciones de otros encuentros abordan la problemática de la alfabetización científica. En particular, en la Conferencia Mundial sobre la

Revista Iberoamericana de Educación

ISSN: 1681-5653

n.º 47/5 – 25 de noviembre de 2008

EDITA: Organización de Estados Iberoamericanos
para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI)



Ciencia para el siglo XXI, auspiciada por la UNESCO y el Consejo Internacional para la Ciencia, se declaraba: «Para que un país esté en condiciones de atender a las necesidades fundamentales de su población, la enseñanza de las ciencias y de la tecnología es un imperativo estratégico. Como parte de esa educación científica y tecnológica, los estudiantes deberían aprender a resolver problemas concretos y a atender a las necesidades de la sociedad, utilizando sus competencias y conocimientos científicos y tecnológicos». (Declaración de Budapest, 1999).

Más aún, frente al cuestionamiento: ¿En qué medida esta mayor atención que se reclama para la tecnología no supone una <<desviación>> que perjudica a la formación más «propriadamente científica»? (Gil Pérez, 1998), se han publicado numerosos documentos que explican que el desarrollo científico resultaría imposible sin las aportaciones de la tecnología, y que, en consecuencia, una mayor atención a la tecnología es un requisito para una educación científica de calidad, capaz de favorecer la adquisición significativa de conocimientos científicos, el interés hacia la ciencia y la toma fundamentada de decisiones en diversos contextos. (Maiztegui, 2002; Guzmán, 1985 y 1996; Hernández, 1998; Valverde, 1999).

La creación de un entorno favorable para el uso de las TIC en el ámbito universitario para la enseñanza y aprendizaje de las ciencias

En el documento "Conectando a la mayoría" (BID, 2006) se detallan y explican los factores que limitan y condicionan la difusión y el uso de las TIC en el ámbito de Latinoamérica y el Caribe:

- a) La escasa capacidad institucional para articular y promover políticas públicas para la difusión y uso de las TIC.
- b) La cobertura limitada de la conectividad y los elevados costos de acceso a las TIC.
- c) La falta de educación digital para interactuar con las TIC y la baja disponibilidad de contenidos de interés local.

Consideramos que este último ítem está asociado a la ausencia de proyectos que van desde el nivel nacional hasta las facultades de cada universidad y, más aún, hasta las áreas más reducidas de cada facultad. Nos referimos a la ausencia de proyectos que propicien aumentar los niveles de acceso y la capacidad de uso de las TIC por parte de los alumnos en las diferentes áreas del conocimiento.

Hernández Fernández (1998), en referencia a los conceptos y procedimientos de la Educación Superior, argumenta que la introducción de métodos que tomen en cuenta la utilización de tecnologías de información y comunicación, deberá ser en tres vertientes: *como medios de enseñanza, como medios de aprendizaje, como medio de investigación y resolución de problemas reales.*

Creemos que las tres vertientes son relevantes y debieran atenderse en conjunto. Los medios de enseñanza que se apoyen en la tecnología actual disponible, podrán resultar mucho más flexibles que los medios audiovisuales tradicionales, tales como pizarrón, retroproyector, equipos de video. Los medios de aprendizaje apoyados en el uso de *software* específico, hipertextos y equipos multimedia enriquecen el proceso de exploración, elaboración de algoritmos, formación de habilidades lógicas. Por último, como medio de investigación y resolución de problemas, el cual facilita la combinación de las componentes

académica e investigativa, los conceptos a aprender y la forma de llevarlo a cabo, favorece la motivación de los alumnos, la posibilidad de proponer diferentes caminos de solución y ensayar más de una respuesta, formular hipótesis; todo ello propicia la formación de un pensamiento reflexivo y científico.

Hoy los profesores e investigadores se encuentran frente al desafío de tener que adoptar nuevas estrategias y estilos de enseñanza, más centrados en el alumno como principal protagonista del proceso de aprendizaje y, por consiguiente, de tener que modificar de algún modo su habitual forma de enseñar. En el caso del profesor universitario, con la ayuda de las nuevas tecnologías podrá ejercer un rol más de orientador y guía del aprendizaje, asistiendo a los alumnos en tareas de razonamiento y búsqueda. También, tendrá que desarrollar el rol de motivador y estimulador del aprendizaje, sirviéndose de los medios informáticos para mejorar el interés de sus alumnos. Por otro lado, la relación entre el profesor y el alumno deberá ser similar a la de co-investigador y co-aprendiz, (Valverde Berrocoso, 1999) con el fin de obtener conjuntamente recursos que amplíen la visión y enriquezcan el conocimiento, facilitando un estilo de aprendizaje que podría denominarse: descubrimiento guiado.

Sin embargo, la eficacia del cambio metodológico que produce la utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en los centros universitarios, se ha de apoyar en planes institucionales y no exclusivamente en voluntades individuales. Todo esto conlleva la necesaria reformulación de las funciones que ha de desarrollar el profesor universitario¹.

Una propuesta de enseñanza y aprendizaje que integra la tecnología y la ciencia

Una manera de integrar la tecnología y la ciencia es a través de la enseñanza y aprendizaje de ésta última utilizando las herramientas tecnológicas disponibles. Sin embargo, la utilización de tales herramientas sigue estando ausente en los currículos universitarios de las diferentes áreas de la matemática, física, química, biología, etc. Mucho se ha mencionado sobre la alfabetización tecnológica y la necesidad de que los contenidos de tecnología sean proporcionados por un amplio abanico de profesores que enseñan disciplinas científicas, y que esos contenidos no deben ser presentados en cursos específicos de tecnología sino de forma transversal e integrada.

Dice Maiztegui que en la medida en que la tecnología y el trabajo científico se relacionan estrechamente, las propuestas de aprendizaje de las ciencias como investigación (que intentan aproximar el trabajo de los estudiantes a las estrategias de la investigación científica) deben poder integrar sin dificultad la dimensión tecnológica. De este modo, el modelo de aprendizaje de las ciencias como investigación podría pasar a ser denominado «aprendizaje de las ciencias como investigación científica y "tecnológica"», para resaltar como es debido el papel de la tecnología. (Maiztegui, *et al.*).

El mismo autor, hace referencia en su artículo a la tecnología como «dimensión olvidada», y explica que no sólo supone señalar una insuficiente presencia de la tecnología en la educación científica, sino, ante

¹ Valverde *et al.* (1999) sostienen que la adopción de las TIC en la universidad requiere tres elementos básicos: la adquisición de la tecnología apropiada, la provisión de recursos adecuados y la formación adecuada para los docentes; y que ninguno de los tres elementos, por sí sólo, garantiza el éxito. Éste dependerá de la eficacia en la gestión del cambio.

Creo que el desarrollo y la implementación de una estrategia integrada de las TIC es uno de los principales retos a los que se deben enfrentar los gestores de las instituciones universitarias.

todo, reconocer una falta de reflexión acerca de la naturaleza y el papel de la tecnología que afectaría a los propios investigadores.

Creemos, sin apartarnos del propósito del presente trabajo, que tal ausencia debiera dar lugar a un análisis más profundo que indague las razones. En el contexto de la universidad argentina se debiera explorar sobre:

- La actualización permanente de los docentes, que los provea de una formación disciplinar y psicopedagógica actualizada, y de un conocimiento de los recursos informáticos en relación con su quehacer profesional.
- El trabajo en equipos de innovación colaborativa, dónde interactúen docentes e investigadores.
- La formación de equipos interdisciplinarios integrados por docentes de matemática, de física, de química, de informática, en proyectos comunes.

Contexto y fundamentación

La matemática ha sido empleada con objetivos profundamente diversos. Fue un instrumento para la elaboración de vaticinios entre los sacerdotes de los pueblos mesopotámicos y, entre los pitagóricos, considerada como un medio de aproximación a una vida más profundamente humana y como camino de acercamiento a la divinidad. Luego fue utilizada como un importante elemento disciplinador del pensamiento en el Medievo y, a partir del Renacimiento, ha sido la más versátil e idónea herramienta para la exploración del universo. En ese contexto, constituyó una magnífica guía del pensamiento filosófico entre los pensadores del racionalismo y filósofos contemporáneos y un instrumento de creación de belleza artística.

Por otra parte, opina Miguel de Guzmán (1985) que la matemática misma es una ciencia intensamente dinámica y cambiante: de manera rápida y hasta turbulenta en sus propios contenidos y aún en su propia concepción profunda, aunque de modo más lento.

Todo ello sugiere que la actividad matemática no puede ser una realidad de abordaje sencillo.

Desde la perspectiva de los propósitos educativos más amplios, se debe priorizar al individuo en formación, a la sociedad en evolución en la que esta persona se ha de integrar, a la cultura en que esta sociedad se desarrolla, a los medios concretos personales y materiales de los que en el momento se puede o se quiere disponer, a las finalidades prioritarias que a esta educación se le quieran asignar y que pueden variar enormemente según el contexto.

La complejidad de la matemática y de la educación sugiere que los teóricos de la educación matemática y, no menos, los investigadores y docentes, deban permanecer constantemente atentos y abiertos a los cambios profundos que, en muchos aspectos, la dinámica rápidamente mutante de la situación global exija.

Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitiva o geoméricamente y cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las

tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas de campo.

Explica Guzmán (1996) que los expertos poseen imágenes visuales, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo y en su dominio del campo en que se mueven. Mediante ellos son capaces de relacionar, de modo muy versátil y variado, constelaciones frecuentemente muy complejas de hechos y resultados de su teoría, y a través de tales redes significativas son capaces de escoger, de manera natural y sin esfuerzo, los modos de ataque más eficaces para resolver los problemas con los que se enfrentan.

Visualizar, en el contexto de *la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la universidad*, tiene que ver con la capacidad de crear imágenes ricas que el individuo puede manipular mentalmente, puede transitar por diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, proporcionar en papel o pantalla de computadora la idea matemática que está en juego.

El trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos ha tenido como principal fuente de inspiración a la visualización, y ésta ha jugado un papel relevante en el desarrollo de las ideas y conceptos del cálculo infinitesimal.

Una de las primeras aproximaciones a los problemas del infinito tuvo lugar en Grecia, a mediados del siglo V a. C., a partir de los problemas de inconmensurabilidad. Luego Arquímedes, a principios del siglo III, propone un proceso heurístico para calcular áreas, volúmenes y el centro de gravedad de algunos cuerpos geométricos.

Recién en el siglo XVII, luego de un largo período de oscuridad, los trabajos matemáticos griegos, traducidos al árabe y luego al latín, salieron a la luz junto con las especulaciones escolásticas medievales sobre el movimiento, la variabilidad y el infinito, y con el álgebra simbólica y la geometría analítica de finales del Renacimiento. Todos ellos formaron la rica amalgama que permitió, en ese momento, la explosión de la matemática infinitesimal.

Cabe mencionar a los principales autores que utilizaron métodos geométricos: Cavalieri y Barrow; y métodos analíticos: Descartes, Fermat y Wallis, y por supuesto, una mención especial para Newton y Leibnitz, quienes culminaron este proceso y fueron nombrados como los descubridores del cálculo infinitesimal (Boyer, 1968).

Sin embargo, en el siglo XX la actividad matemática sufrió la influencia de una corriente formalista, que rechazaba la visualización como herramienta de demostración y análisis. La crisis de los fundamentos de principio de siglo empujó a los pensadores matemáticos hacia el formalismo, hacia el énfasis sobre el rigor, a una cierta huida de la intuición en la construcción de su ciencia. Lo que fue beneficioso para la fundamentación fue considerado por muchos, bueno también para la transmisión de conocimientos. Las consecuencias para la enseñanza de las matemáticas, en general, fueron nefastas, pero especialmente para la evolución del pensamiento geométrico.

Desde entonces, las presentaciones no visuales son las más habitualmente utilizadas para comunicar ideas matemáticas. Esta tendencia se fundamenta hoy en la creencia de matemáticos, docentes y estudiantes de que las matemáticas no son visuales (Eisenberg y Dreyfus, 1991).

Como reacción a un abandono injustificado de la geometría intuitiva en nuestros programas, hoy se considera una necesidad ineludible, desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, recuperar el contenido espacial e intuitivo en toda la matemática, no ya sólo en lo que se refiere a la geometría.

La necesidad de una vuelta del espíritu geométrico a la enseñanza matemática es algo en lo que ya todo el mundo parece estar de acuerdo. Sin embargo, aún no es muy claro cómo se debe llevar a cabo.

La enseñanza y aprendizaje del cálculo en las carreras de Ingeniería

La algebrización del cálculo diferencial e integral fue un producto de este proceso. En la enseñanza universitaria se pone de manifiesto a través de un enfoque algebraico y reduccionista de la enseñanza del cálculo, que se basa en las operaciones algebraicas con límite, derivadas e integrales, pero que trata de una forma simplista los conceptos específicos del análisis, tales como las razones de cambio o la integral definida.

Consideramos que las dificultades que presenta el aprendizaje del Análisis Matemático en primer año de la universidad, son atribuibles a esta situación de contexto.

Por una parte, tales dificultades están asociadas al predominio del formalismo en el abordaje de los conceptos y la ausencia de asociación con un enfoque geométrico. En este sentido, los alumnos no logran comprender el concepto de integral definida de una función como el área bajo la curva de la misma, pues no visualizan cómo se construye esta área según una suma, conocida habitualmente como Suma de Riemann².

Los docentes habitualmente enseñan el concepto en forma expositiva, eludiendo el verdadero propósito que consiste en obtener aproximaciones cada vez más precisas.

Por la otra, el abordaje simplista y sin aparente conexión con las aplicaciones del cálculo integral obstaculiza la comprensión y por ende la resolución de problemas referidos a cálculo de áreas, longitud de curvas, volumen de sólidos de revolución; y los referidos a aplicaciones a la ingeniería: trabajo, presión, fuerza hidrostática y centros de masa.

El uso del ordenador en el aula, como recurso didáctico facilitador de los procesos de enseñanza aprendizaje, puede ser un medio para coordinar los distintos registros de representación de un concepto, si bien consideramos que la mayor contribución de las nuevas tecnologías a la mejora del aprendizaje se centra en la creación de medios personalizados que mejor se adapten a los requerimientos pedagógicos de la propuesta.

De la mano de tales herramientas, consideramos que la enseñanza de la matemática requiere de una inmersión en las dificultades del pasado, una comprobación de lo tortuoso de los caminos de la invención, con la percepción de la ambigüedad y confusión iniciales.

² En 1629 Fermat presentó un método geométrico que permite aproximar con muy buena precisión el área bajo la curva $y=x^n$ en un intervalo dado, utilizando infinitos subintervalos sobre la abscisa y sumado las áreas de los sucesivos rectángulos con base en la abscisa y altura dada por la ordenada del punto.

La historia de la matemática suele estar totalmente ausente de la formación universitaria en nuestro país. Nos parece muy conveniente que las diversas materias que enseñamos se beneficiaran de la visión histórica y que, a todos nuestros estudiantes, se les proporcionara un breve panorama global del desarrollo histórico de la ciencia que les va a ocupar toda su vida.

Propósitos

En el contexto anteriormente descrito, diseñamos e iniciamos el desarrollo a principios del año 2005 de un Proyecto muy ambicioso, a nuestro criterio, con el propósito general de acercar a nuestros estudiantes de Cálculo Integral a las ideas de los primeros pensadores, y otros propósitos más específicos:

- a) Integrar una línea de investigación en el área de las ciencias exactas respecto de los procesos infinitos que intervienen en los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral en relación con la problemática de su enseñanza y aprendizaje.
- b) Mejorar las prácticas educativas desde una propuesta para la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en el contexto de primer año de la universidad.
- c) Formar un equipo multidisciplinario en el área de las ciencias exactas y naturales.
- d) Abordar nuevos problemas de física y química y proveer a los docentes de estas disciplinas un modo diferente de enseñar su disciplina y de que los alumnos comprendan.

Actividades en relación con la propuesta

La primer propuesta referida a integrar una línea de investigación en el área de las ciencias exactas respecto de los procesos infinitos que intervienen en los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral en relación con la problemática de su enseñanza y aprendizaje, dio lugar a la elaboración de dos Proyectos de investigación, a saber:

- 1) *“Los errores en el aprendizaje de Análisis Matemático”*, a partir del cual, los estudios exploratorios acerca de los conocimientos previos que estos alumnos poseen sobre el cálculo integral, con un análisis detallado del material bibliográfico que utilizan los docentes en las escuelas de nivel medio con orientación técnica y de los escritos de los alumnos, nos han permitido inferir que se enseña el concepto de integral como una antiderivada, poniendo el acento en los aspectos algebraicos.
- 2) *“El impacto de los entornos informáticos en la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral”*, a partir del cual abordamos una concepción globalizadora para la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral, que atendiese no sólo a la infraestructura técnica, sino a la infraestructura pedagógica, y también a la infraestructura social y epistemológica.

En el marco de este último proyecto se desarrollaron propuestas de enseñanza y aprendizaje que requirieron el diseño de herramientas específicas que permitieran utilizar el ordenador como recurso didáctico, como herramienta de trabajo y también como elemento innovador.

La siguiente propuesta estuvo referida a la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en el contexto de primer año de la universidad desde la perspectiva del nuevo paradigma de la sociedad del conocimiento.

La misma fue implementada en el período julio-noviembre 2006 en un curso de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco, con un diseño de tipo pre-experimental de pre-prueba-tratamiento-post-prueba con un solo grupo.

Se diseñó un paquete de *software* que permitió, por una parte, el abordaje del cálculo integral a partir del concepto de integral definida asociado al área bajo la curva, desde una perspectiva geométrica, atendiendo a los procesos que el hombre ha seguido en su creación de las ideas matemáticas; y por la otra, establecer un puente entre la conceptualización de integración y los problemas de aplicación relacionados con la ingeniería. El uso del ordenador permitió disponer de una gama muy amplia de problemas a elegir, dónde la elección no resultó condicionada por las dificultades algebraicas del cálculo.

Se diseñaron un conjunto de actividades orientadas a promover que los alumnos conjeturen, experimenten, analicen retrospectivamente, extrapolen, argumenten, pregunten a sus pares y a sus docentes, se comprometan en el desarrollo de sus actividades, discutan sobre sus propios errores y revean sus desempeños. Los diferentes grupos trabajaron en actividades que denominamos subproyectos (se exhiben los subproyectos N.º 1, N.º 2 y N.º 3 en el apéndice 1).

Se rediseñaron las formas de evaluación, de tal manera que el análisis de las producciones facilitase al alumno poder reflexionar sobre sus propios errores durante el proceso de aprendizaje y que, a la hora de realizar las evaluaciones, los estudiantes dispongan de las mismas herramientas que en clase.

La recolección de datos se realizó de manera cuanti y cualitativa a través de:

- Un pretest al inicio de la intervención que permitiera:
 - a) Explorar las concepciones previas de los alumnos sobre el cálculo integral y su familiarización con las herramientas informáticas que iban a utilizar durante la experiencia
 - b) Ubicar a cada alumno en una categoría preestablecida.
- Evaluaciones sumativas semanales desarrolladas en el laboratorio de Informática
- La retroalimentación y las correcciones sobre las observaciones realizadas por el docente
- Los informes mensuales de avance
- Una planilla de observación de clases semanal
- Una planilla de evaluación semanal
- Un postest que permitió analizar los avances y aprendizajes logrados luego de la implementación de la propuesta didáctica (ver apéndice 2).
- Las consideraciones finales de cada alumno que formó parte de la experiencia.

La tercer propuesta consistió en la formación de un equipo multidisciplinario en el área de las ciencias exactas y naturales. Esto permitió la realización de actividades de capacitación con el propósito de afianzar la multidisciplinariedad:

- 1) Se llevó a cabo una capacitación en forma continua de los docentes integrantes del Proyecto en tareas de innovación colaborativa, relacionado con los aspectos metodológicos de la propuesta.
- 2) Una capacitación en forma continua de docentes del área disciplinar, docentes del área informática y alumnos becados, en el diseño, el desarrollo, la adecuación y el uso de diferentes *softwares* que se fueron incorporando, paulatinamente, como herramientas a la propuesta metodológica.
- 3) El desarrollo de talleres de capacitación en el uso de la metodología y de las nuevas herramientas informáticas.

La cuarta propuesta consistió en el abordaje de nuevos problemas de física y química, y en proveer a los docentes de estas disciplinas de un modo diferente de enseñar y de que los alumnos comprendan. Para ello se implementaron talleres de capacitación donde se incluyeron un número importante de problemas que se enseñan en la asignaturas Física I y Química, ambas correspondientes al primer año de su carrera, y de cursado paralelo con Análisis Matemático I, de tal modo que los docentes pudieran experimentar, conjeturar y obtener conclusiones sobre la resolución de problemas mediante un *software* pre-diseñado.

Perspectivas a futuro

- 1) Desarrollar nuevos talleres de capacitación. La infraestructura técnica requerida exige que los profesores y los alumnos tengan acceso a las nuevas tecnologías y que tengan la suficiente destreza para usarlas. Por otra parte, los profesores de otras áreas de ciencias necesitan reflexionar sobre cómo hacer uso de la tecnología en su propia enseñanza.
- 2) Atender al afianzamiento de la infraestructura social. Las nuevas tecnologías o los aprendizajes asociados al uso de un *software* deben integrarse a los procesos educativos esenciales en vez de constituir una actividad aislada. El currículo, la organización y la estructura de los cursos y las prácticas evaluadoras deben apoyar la nueva cultura de aprendizaje en colaboración y construcción del conocimiento. Sirve de muy poco que nuestros alumnos aprendan a resolver problemas en el área de las ciencias, haciendo uso de herramientas informáticas, si luego en materias de años superiores se les exige que resuelvan integrales haciendo uso de intrincados métodos de sustitución con lápiz y papel.
- 3) Atender al afianzamiento de la infraestructura epistemológica. Los profesores y los estudiantes deben desarrollar una conciencia epistemológica de las diferentes categorías de conocimiento y de los procesos de investigación para comprender el significado de buscar respuestas a través del uso del ordenador. En ese sentido, estamos diseñando y seleccionando problemas integradores para la asignatura Análisis Matemático I de tal modo

que los alumnos, distribuidos en grupos, puedan dar respuesta a los mismos haciendo mención sobre *cómo* se llevaron a cabo los procesos de indagación y conjeturación, *cuáles* fueron las experiencias realizadas, etc. En ese sentido, es importante que puedan anexar los resultados algebraicos, numéricos ó gráficos producidos con el *software* utilizado.

- 4) Replicar la propuesta durante el ciclo lectivo 2008 en todos los primeros años de Ingeniería, especialidades: eléctrica, mecánica Y civil.

APÉNDICE 1: Síntesis de subproyectos

SUBPROYECTO N.º 1: Abordaje del concepto de integral definida por aproximaciones sucesivas

En la 1.^a actividad se solicita a cada grupo de trabajo que estime el área debajo de la gráfica de $f(x) = \cos(x)$ desde $-\pi$ hasta π utilizando 10 rectángulos, luego 100, luego 1000. Luego se les pide que argumenten acerca de la convergencia de las aproximaciones (Gráfico 1).

GRÁFICO 1



En un ítem posterior, con el propósito de descubrir las relaciones entre las aproximaciones por defecto-exceso y los intervalos de crecimiento-decrecimiento de la curva, se les solicita que modifiquen el intervalo de estudio, por ejemplo $[0, \pi/4]$, y analicen los valores obtenidos en el área por defecto y exceso.

En la 2.^a actividad se les solicita que analicen la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

“Las aproximaciones por defecto al valor del área bajo la curva, requieren considerar los puntos muestra a la izquierda de cada subintervalo, así como las aproximaciones por exceso requieren considerar los puntos muestra a la derecha de cada subintervalo.”

Luego deben proponer, con el auxilio del *software*, ejemplos que sustenten su argumentación.

En la 3.^a actividad cada grupo debe analizar la convergencia del área bajo la curva de diferentes funciones, incluso algunas no continuas, en el intervalo considerado, y luego exponer sus conclusiones.

Cada grupo debió presentar un informe con los resultados obtenidos y los archivos generados con el *software* en disquete o *pendrive*.

SUBPROYECTO N.º 2: El área entre dos curvas

Atendiendo a la conceptualización de integral definida como la sumatoria infinita de las áreas de rectángulos de base cada vez más pequeña y altura dada por la ordenada de la curva, se utilizó el mismo concepto (fundamental invariante para nuestro proyecto), para que los alumnos pudieran conjeturar sobre el modo de calcular el área entre dos curvas.

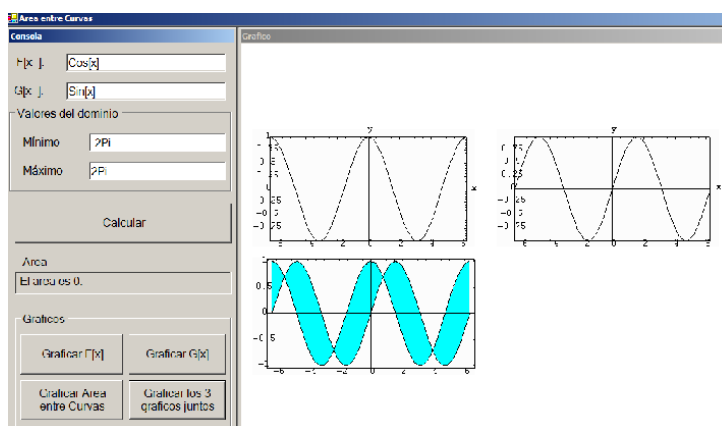
Luego se propusieron actividades donde debieron calcular tales áreas e interpretar conceptualmente los resultados obtenidos.

A modo de ejemplo se presenta la actividad N.º 1 (Gráfico 2).

Dos partículas se desplazan en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ y las respectivas velocidades están dadas por las funciones $\text{Cos}(x)$ para la primera de ellas, y $\text{Sen}(x)$ para la segunda.

- ¿Qué representa el área comprendida entre ambas?
- ¿Cuál es el valor del área entre dos intersecciones sucesivas?
- ¿Este valor se mantiene constante? Conjeture en base a diferentes gráficos, obtenga conclusiones y justifíquelas.

GRÁFICO 2



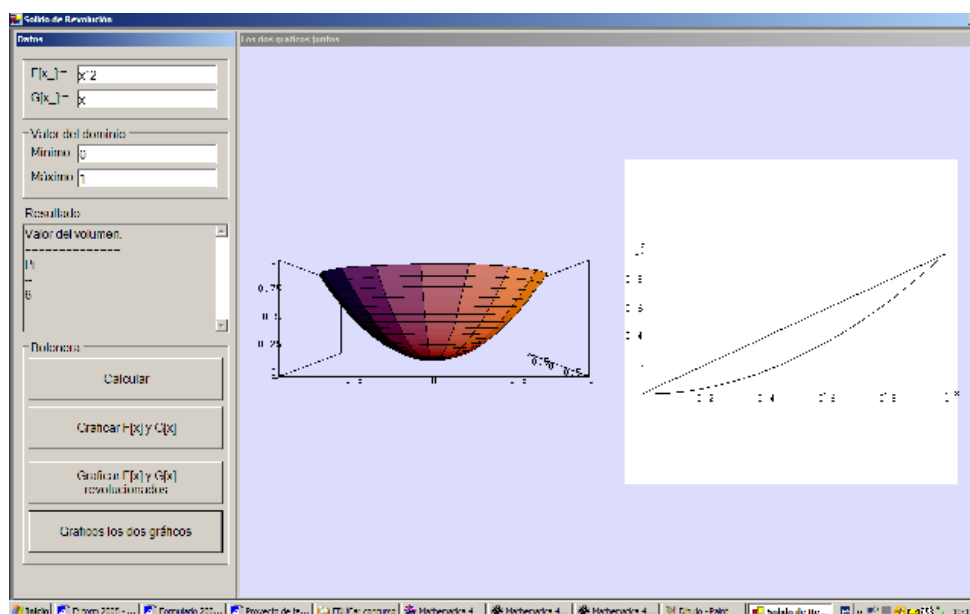
SUBPROYECTO N.º 3: Aplicaciones de la integración

Se propone un conjunto de actividades que los diferentes grupos de alumnos deberán resolver con el auxilio de los paquetes de *software* desarrollados, con el propósito de, por una parte, establecer un puente entre la conceptualización de la integración y los problemas de aplicación relacionados con la ingeniería, y por la otra, resolver los problemas de cálculo que sean significativos para los estudiantes por su aplicabilidad a situaciones de la vida real, sin los condicionamientos propios de los extensísimos y, a veces, sumamente complejos desarrollos algebraicos del cálculo.

Una 1.ª actividad está referida a la identificación del área entre dos curvas y la determinación del volumen del sólido que se genera al hacerla girar sobre uno de los ejes (Gráfico 3).

- Calcule el área de la región determinada por las curvas $y=x^2$, $y=x$
- Determine el volumen del sólido obtenido haciendo girar la región limitada por esas curvas alrededor del eje x
- Suponga que el eje de revolución está dado por $y=k$ ¿Cuál deber ser el valor de k para que el volumen sea 16?
- ¿Cuáles son los límites de integración: a y b , si se desea obtener un sólido alrededor del eje y , a partir de esta región?
- ¿Varía el valor del volumen si se modifican los límites con un corrimiento hacia arriba de tal modo que el límite inferior es ahora $a+h$ y el superior es $b+h$? Justifique su respuesta.

GRÁFICO 3



La 2.ª actividad está referida a determinar el trabajo necesario para llevar a cabo la tarea de subir un bulto que pesa 50 kg desde la planta baja a la terraza de un edificio cuya altura es 20 m, si para ello se emplea una soga que pesa 800 gramos por metro.

La 3.ª actividad propone analizar el crecimiento de una población de bacterias.

La 4.ª actividad propone determinar la velocidad de un móvil y la distancia recorrida durante un intervalo de tiempo dado, si se conoce su aceleración.

Cabe remarcar que la realización de estas actividades requirió del uso de los paquetes de *software* desarrollados. Los alumnos debieron graficar en numerosas oportunidades, modificar sus conjeturas, proponer nuevas soluciones, experimentar, analizar retrospectivamente los resultados obtenidos, proponer nuevas soluciones.

APÉNDICE 2: Postest

Se exhiben los seis problemas propuestos y un diagrama de barras (gráfico 4) con el porcentual de respuestas correctas correspondientes a cada ítem de cada problema.

Problema 1

- Calcule el área de la región determinada por las curvas $y=e^x$, $y=3$, $x=0$
- Determine el volumen del sólido obtenido haciendo girar la región limitada por esas curvas alrededor del eje x
- Suponga que el eje de revolución está dado por $y=k$ ¿Cuál deber ser el valor de k para que el volumen sea 16?
- ¿Cuáles son los límites de integración: a y b , si se desea obtener un sólido alrededor del eje y , a partir de esta región?
- ¿Varía el valor del volumen si se modifican los límites con un corrimiento hacia arriba de tal modo que el límite inferior es ahora $a+h$ y el superior es $b+h$? Justifique su respuesta.

Problema 2

Proponga una función tal que el área bajo la curva entre 0 y n , se corresponda con el área del triángulo de base n y altura $1/n$.

Problema 3

Encuentre el número k / la recta $y=k$ divida la región limitada por las curvas $y=x^2$, $y=10$ en dos regiones con áreas iguales.

Problema 4

Sea la región determinada por $S=\{(x,y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \tan(x) \sec(x)\}$

- Encuentre valores adecuados para a y b de tal modo que la región resulte finita.
- Estime el área en el ítem anterior con una aproximación de 50 subdivisiones.

Problema 5

Encuentre una función f y un número a tales que:

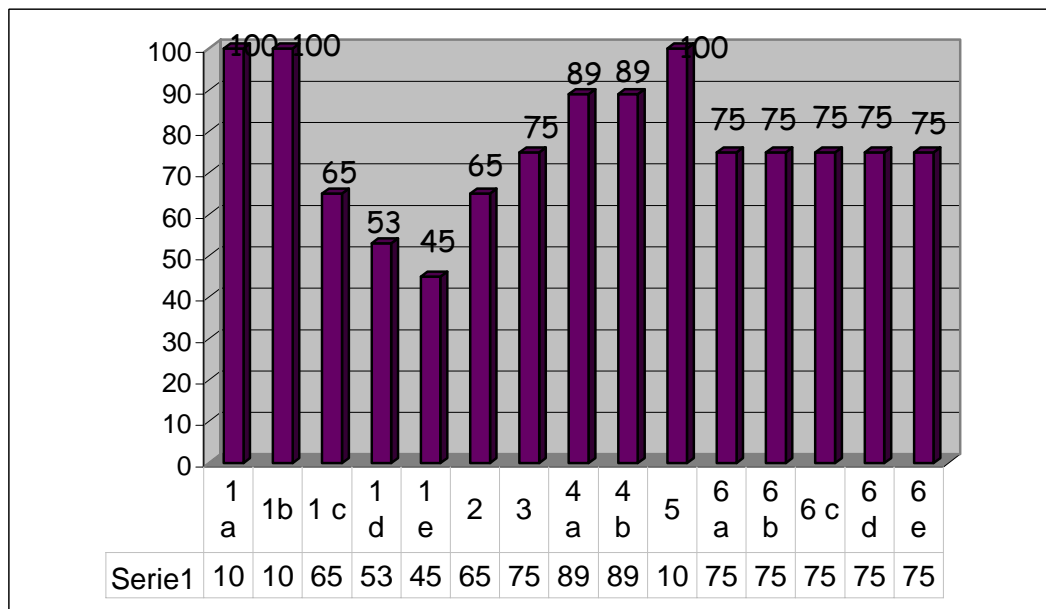
$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}$$

Problema 6

(10) Sea $g(x) = \int_1^{\cos(x)} \sqrt[3]{1-t^2} dt$

- Grafique g
- ¿Cuáles son los puntos críticos de g ?
- ¿En cuáles puntos g tiene máximos o mínimos? Justifique su respuesta.
- Analice la concavidad de g .
- Analice los intervalos de crecimiento y decrecimiento de g .

GRÁFICO 4



Bibliografía

ÁLVAREZ, Isabel; AYUSTE, Ana; GROS, Begoña; GUERRA, Vania, y ROMANA, Teresa (2005): "Construir conocimiento con soporte tecnológico para un aprendizaje colaborativo", en: *Revista Iberoamericana de Educación*, n.º 36, Madrid, OEI <<http://www.rieoei.org/deloslectores/1058alvarez.pdf>> [Consulta: mar. 2006]

- BANCO INTERAMERICANO DE DESARROLLO, DEPARTAMENTO DE DESARROLLO SOSTENIBLE (2006): "Conectando a la mayoría. Lineamientos estratégicos para la difusión de las tecnologías de información y comunicación para el desarrollo", <<http://www.iadb.org/sds/doc/conectandoalamayoria.pdf>> [Consulta: abr. 2006]
- BOYER, C. B. (1968): *A History of Mathematics*, Nueva York: J. Wiley. Madrid: Traducido al castellano en Alianza Editorial.
- DECLARACIÓN DE BUDAPEST (1999): *Marco general de acción de la declaración de Budapest* <<http://www.oei.org.co/cts/budapest.dec.htm>>. [Consulta: mar. 2005]
- EISENBERG, T., y DREYFUS, T. (1991): "On the reluctance to visualize in mathematics", en: ZIMMERMANN, W., y CUNNINGHAM, S. (eds.): *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, pp. 25-37. MAA Notes 19. USA.
- GIL PEREZ, Daniel (1998): "El papel de la Educación ante las transformaciones científico-tecnológicas", en: *Revista Iberoamericana de Educación*, n.º 18, Madrid, OEI <<http://www.rieoei.org/oeivirt/rie18a03.htm>> [Consulta: mar. 2005].
- GUZMÁN, Miguel de (1985): "Enfoque heurístico de la enseñanza de la matemática. Aspectos didácticos de matemáticas 1", en: *Publicaciones del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza*, pp. 31-46.
- (1996): "El rincón de la pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático", en: *Elementos básicos del análisis*, Madrid: Pirámide.
- (1989): "Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática. Estudio pedagógico", en: *Revista de Ciencias de la Educación*, n.º 21, pp. 19-26.
- PEDRO, Francesc, y BENAVIDES, Francisco (en publicación): "Políticas educativas sobre nuevas tecnologías en los países iberoamericanos", en: OEI http://www.rieoei.org/numeros_proximos.htm [Consulta: ago. 2007].
- HERNÁNDEZ FERNÁNDEZ, Herminia; DELGADO RUBÍ, Juan R., y FERNÁNDEZ DE ALAÍZA, Berta (1998): *Cuestiones de didáctica de la Matemática. Conceptos y Procedimientos en la Educación Polimodal y Superior*. Argentina: Homo Sapiens Ediciones
- MAIZTEGUI, Alberto y OTROS: (2002): "Papel de la tecnología en la educación científica: una dimensión olvidada", en: *Revista Iberoamericana de Educación*, n.º 28, Madrid, OEI <<http://www.rieoei.org/rie28a05.htm>> [Consulta: jun. 2006].
- VALVERDE BERROCOSO, J., y GARRIDO ARROYO, M.(1999): "El impacto de las tecnologías de la información y la comunicación en los roles docentes universitarios", en: *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 2 (1), en: <<http://www3.uva.es/aufop/publica/actas/ix/50-valverde.pdf>> [Consulta: oct. 2005].