El diálogo en el quehacer matemático: su valor como recurso

MARÍA CRISTINA ROCERAU
SILVIA LUCÍA VILANOVA
Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina

De la época heroica, que se extiende a lo largo de la última parte del siglo V a.C., queda poco que pueda servir como evidencia directa de la evolución matemática. Los documentos matemáticos de primera mano que proceden del siglo IV a.C. son muy escasos, pero esto en parte se compensa por las informaciones procedentes de los filósofos que estaban *au courant* de la matemática de su época. Surge en este período la figura de Sócrates, cuya prédica, en gran medida, se ha de perpetuar por su discípulo Platón quien funda la Academia, donde se forma Aristóteles, quien a su vez funda el Liceo. Se constituyen así dos grandes centros de la filosofía griega que influyeron notablemente en el pensamiento de la época y, por ende, en la Matemática (Boyer, 1986).

La influencia de Platón sobre la Matemática es tan importante, que es considerado por algunos historiadores como *hacedor de matemáticos*. Dos frases conocidas reflejan el elevado concepto que la escuela platónica tenía sobre esta ciencia: una de ellas es "Nadie que ignore la geometría penetre bajo mi techo" (frase que aparece en el pórtico de La Academia); la otra es la respuesta que da cuando le preguntan cuál es la ocupación de Dios: "Geometriza constantemente".

Arquitas, matemático de la época heroica, estableció el *cuadrivium*, que incluía la aritmética, la geometría, la música y la astronomía como núcleo de una educación liberal; junto al *trivium*, formado por la gramática, la retórica y la dialéctica de Zenón constituyen las siete artes liberales que durante dos milenios permanecieron como *leitmotiv.*

Podemos pensar, entonces, que matemáticos y filósofos de la época heroica son en parte responsables de las tradiciones educativas y en particular de la forma en la que fueron transmitidas. El presente trabajo tiene la intención de vincular el método socrático con algunos textos de nuestra época y revalorizar el diálogo, como herramienta para el quehacer matemático. Para ello comenzaremos por hacer una breve descripción de este método incluyendo, a modo ilustrativo, algunos fragmentos que aparecen en uno de los diálogos de Platón.

El método socrático

Se dice que *Sócrates* no dejó obra escrita acerca de su método, pues éste exigía del diálogo viviente que, por sus características, no podía realizarse en obras escritas. Son sus discípulos los que, según su manera de entenderlo, reproducen el pensamiento del maestro.

Revista Iberoamericana de Educación
ISSN: 1681-5653
n.º 47/4 – 10 de noviembre de 2008
EDITA: Organización de Estados Iberoamericanos
para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI)

La contribución de Sócrates a la filosofía ha sido de un marcado tono ético. La base de sus enseñanzas fue la creencia en una comprensión objetiva de los conceptos de justicia, amor y virtud y en el conocimiento de uno mismo. Hizo hincapié en la discusión racional y en la búsqueda de definiciones universales. Dice Bréhier (1956): "lo que con razón puede atribuirse a Sócrates son los razonamientos inductivos y las definiciones universales, situados unos y otras al principio de la ciencia".

El conocimiento de la propia ignorancia es para Sócrates el momento inicial y preparatorio del filosofar. Este primer momento es el de la refutación, que purga y libera el espíritu de los errores, después de lo cual se encuentra dispuesto a engendrar la verdad, estimulado por la mayéutica . Su método se aplicaba sólo a cuestiones morales.

En un pasaje del Teetetos de Platón, en el cual Sócrates es uno de los personajes de este diálogo, habla del arte de la mayéutica:

> Mi mayéutica –dice Sócrates– tiene las mismas características generales que el arte [de las comadronas]. Pero difiere de él en que hace parir a los hombres y no a las mujeres y en que vigila las almas, y no los cuerpos, en su trabajo de parto. Lo mejor del arte que practico es, sin embargo, que permite saber si lo que engendra la reflexión del joven es una apariencia engañosa o un fruto verdadero. (Ferrater Mora, J., 1969).

Su método centrado en el *diálogo*, y sobre todo en la i*nterrogación*, su habilidad de persuadir y disuadir, y, de hecho, toda su obra se dirigió al descubrimiento de problemas, más que a la búsqueda de soluciones ."Sócrates hacia surgir dondequiera lo que antes parecía no existir: un problema." (Ferrater Mora, J, 1969).

En *El Menón,* uno de los escritos de Platón, Sócrates lleva a cabo una elegante demostración de que "aprender es recordar lo que ya se sabe". es decir, una demostración de la doctrina platónica de la reminiscencia o anamnesis:

> MENÓN: Consiento en ello, Sócrates. Pero, ¿te limitarás a decir simplemente que nosotros nada aprendemos, y que lo que se llama aprender no es otra cosa que recordar? ¿Podrías enseñarme como se verifica esto?
>
> SÓCRATES: Eso no es fácil; pero en tu obsequio haré lo que me sea posible. Llama a alguno de los muchos esclavos que están a tu servicio, el que quieras, para que te demuestre en él lo que deseas.

En los siguientes fragmentos vemos como Sócrates logra suscitar en los otros la conciencia de su ignorancia, para luego con el arte de la mayéutica, convertirla en el estímulo y preparación para encaminarlos al descubrimiento:

> (…) SÓCRATES. Pero, ¿ lo que es cuatro veces mas grande, es doble?
>
> ESCLAVO. No, Zeus! (…)
>
> SÓCRATES. ¿ Con qué línea se forma? Procura decírnoslo exactamente, y si no quieres calcularla, muéstranosla,
>
> ESCLAVO. Por Zeus! No sé, Sócrates
>
> SÓCRATES. Mira ahora de nuevo, Menón. Lo que ha andado el esclavo en el camino de la reminiscencia. No sabia al principio cual es la línea con que se forma el espacio de ocho pies, como ahora no lo sabe, pero

entonces creía saberlo y respondió con confianza como si lo supiese, y no creía ser ignorante en este punto. Ahora reconoce su embarazo, y no lo sabe, pero tampoco cree saberlo.

(...)

SÓCRATES. ¿Piensas que hubiera intentado indagar y aprender lo que él creía saber ya, aunque no lo supiese, antes de haber llegado a dudar; si convencido de su ignorancia, no se le hubiera puesto en posición de desear saberlo?

MENÓN. Yo no lo pienso, Sócrates.

SÓCRATES. El adormecimiento le ha sido, pues, ventajoso.

MENÓN. Me parece que sí.

SÓCRATES. Repara ahora cómo, partiendo de esta duda, va a descubrir la cosa, indagando conmigo; aunque yo no haré más que interrogarle, sin enseñarle nada. Observa bien por si llegas a sorprenderme enseñándole o explicándole algo, en una palabra, haciendo otra cosa que preguntarle lo que piensa. Tú, esclavo, dime: ¿este espacio, no es de cuatro pies? ¿Comprendes?

ESCLAVO. Sí. (...)

La conversación entre Sócrates y el esclavo continúa y después un largo trabajo el filósofo logra finalmente que su interlocutor redescubra un teorema matemático que nunca antes había aprendido o escuchado (la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado). Continua su razonamiento, para terminar de demostrarle a Menón que aprender es recordar:

SÓCRATES. ¿Qué te parece, Menón? ¿Ha dado alguna respuesta que no sea suya?

MENÓN. No, ha hablado siempre por su cuenta.

SÓCRATES. Sin embargo, como dijimos antes, él no lo sabía.

MENÓN. Dices verdad.

SÓCRATES. ¿Estos pensamientos estaban en él o no estaban?

MENÓN. Estaban.

SÓCRATES. El que ignora, tiene, por lo tanto, en sí mismo, opiniones verdaderas relativas a lo mismo que ignora.

MENÓN. Al parecer.

SÓCRATES. Estas opiniones llegan a despertarse, como un sueño, y si se le interroga, muchas veces y de diversas maneras, sobre los mismos objetos, ¿crees que, al fin, no se adquirirá un conocimiento que será lo más exacto posible?

MENÓN. Es verosímil.

SÓCRATES. De esta manera sabrá, sin haber aprendido de nadie, por medio de simples interrogaciones y sacando así la ciencia de su propio fondo"

Un salto, desde la época heroica a nuestros días

Podemos señalar muchos casos en los cuales el *diálogo* es utilizado en alguna medida como forma de enseñanza. Ejemplos de ello son la obra pionera de Polya con el método para plantear y resolver problemas, el eclecticismo del matemático Húngaro Rényi y la mirada certera de Morris Kline acerca de lo que se denominó "matemática moderna", como si no hubiera sido un continuo a lo largo de la historia.

Polya: cómo plantear y resolver problemas

Es interesante destacar que Polya (1887-1985) inicia en Budapest estudios universitarios en leyes, para luego estudiar literatura. Allí realiza, como parte de un curso de filosofía, un trabajo sobre matemática, doctorándose finalmente en esta disciplina en 1912. Una de su obras, de especial interés para docentes y estudiantes de matemática, se llama *Cómo plantear y resolver problemas*. La primera edición inglesa fue realizada en el año 1945 y la primera versión en español fue publicada en 1965.

Es una obra interesante que enfatiza el proceso de invención de la matemática y su lado experimental e inductivo, proporcionando procedimientos originales para llegar a la solución de los problemas. Tal vez es la formación humanística de Polya la que despierta su interés por escribir este libro bajo una forma particular de presentar sus ideas.

Este material constituye el primer intento de la puesta a punto de la *heurística moderna*, que según su propia definición:

> (…) trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. Son diversas sus fuentes de información y no se debe descuidar ninguna. Un estudio serio de la heurística debe tener en cuenta el trasfondo tanto lógico como psicológico; no deben descuidarse los aportes al tema hechos por autores tales como Pappus, Descartes, Leibniz y Bolzano, pero debe apegarse más a la experiencia objetiva. Una experiencia que resulta a la vez de la solución de problemas y de la observación de los métodos del prójimo, constituye la base sobre la cual se construye la heurística. En este estudio buscaremos, sin descuidar ningún tipo de problema, los puntos comunes de las diversas formas de tratar cada uno de ellos y después trataremos de determinar las características generales independientes del tema del problema. Tal estudio tiene objetivos prácticos; una mejor comprensión de las operaciones mentales típicamente útiles en la solución de un problema puede en efecto influir favorablemente en los métodos de la enseñanza, en particular en lo que se refiere a la matemática. (Polya, 1979, p. 102).

Sin duda esta obra, como lo señalaron importantes matemáticos actuales, entre ellos Schoenfeld, sentó las bases sobre las que se impulsó el cambio en la enseñanza de la matemática.

El libro consta de cuatro partes. En la primera, llamada *En el salón de clases*, después de hablar del objetivo del libro, de la enseñanza de la matemática y de los roles de docentes y alumnos, explica el desarrollo de su método a través de cuatro problemas que, bajo la forma del *diálogo,* ayuda a resolver. En el primero de ellos: "*Determinar la diagonal de un paralelepípedo rectangular dados su longitud, su ancho y su altura"*, estudia el proceso de las cuatro fases de su método, las preguntas que hay que realizar, los comentarios que le sugieren. En su texto siempre hay un doble diálogo maestro-alumno y escritor-lector. A modo de ejemplo se transcribe una parte del texto referida a este problema:

> (...) Sin embargo, el profesor debe prever el caso en que dicha alusión no logre sacudir el sopor de sus alumnos; tiene que estar dispuesto a emplear toda una serie de alusiones cada vez más explícitas:
>
> ¿Qué clase de triángulo quieren que aparezca?
>
> ¿Todavía no pueden determinar la diagonal? Sin embargo, decían ustedes que sabían cómo encontrar el lado del triángulo. Entonces ¿que van a hacer?
>
> ¿Podrían encontrar la diagonal si fuese el lado de un triángulo?
>
> Cuando finalmente, con su ayuda, los alumnos han logrado hacer el elemento auxiliar decisivo, el maestro debe asegurarse que ven la continuación del razonamiento antes de animarlos a lanzarse en cálculos reales. (Polya, 1979).

En los tres problemas siguientes desarrolla en forma más concisa el mismo método.

La segunda parte, titulada *Como resolver un problema. Un diálogo,* es la más corta y, como su título expresa, es un diálogo en el que un supuesto docente responde breves preguntas que un alumno ideal realiza.

> ALUMNO: ¿Por dónde puedo empezar?
>
> DOCENTE: Empiece de nuevo por el enunciado del problema. Empiece cuando dicho enunciado resulte tan claro y lo tenga tan bien grabado en su mente que pueda usted perderlo de vista por un momento sin temor de perderlo por completo.
>
> ALUMNO: ¿Qué puedo hacer?
>
> DOCENTE: Aislar las principales partes del problema. La hipótesis y la conclusión son las principales partes de un "problema por demostrar"; la incógnita, los datos y las condiciones son las (…)
>
> ALUMNO: ¿Qué gano haciendo esto?
>
> DOCENTE: Está usted preparando y aclarando detalles que probablemente estarán en juego más tarde. (POLYA, 1979).

La tercera parte, llamada *Breve diccionario de heurística,* es la más extensa y fundamental del libro. En sus páginas realiza un serio estudio de los métodos de solución y hace un recorrido histórico por la heurística, comenzando con matemáticos como Pappus y terminando en contemporáneos como Hadammard .

La cuarta y última parte, *Problemas, sugerencias, soluciones,* da al lector la oportunidad de resolver veinte problemas de diverso tipo y para cada uno de ellos ofrece sugerencias para su solución, siguiendo la línea de su método y en diálogo permanente con el lector-resolutor. En las cuatro partes del libro se observa claramente un método didáctico inductivo.

Rényi: sus diálogos

Alfred Rényi nació en Budapest en 1921 y murió en 1970. Fue un importante matemático húngaro que se destacó en estadística, métodos probabilísticos en la teoría del número, teoría de grafos y que aplicó técnicas probabilísticas a la mecánica cuántica, a la química industrial, a la biología, a la regulación de tráfico y al control de precios. Junto a su interés por las aplicaciones de la matemática puede verse su interés por la historia, la filosofía de la matemática y la enseñanza de la matemática en los niveles elementales.

Discusiones originadas en su país sobre las relaciones entre matemática pura y matemática aplicada, conducen a Rényi a escribir su opinión al respecto en tres ensayos.

Su ideas son expuestas en forma de diálogo ficticio en los que sus actores principales son Sócrates, Arquímedes, Herón, Hipócrates, Galileo, etc. Estos grandes diálogos son publicados en Hungría en 1965 y en ellos Rényi batalla con problemas como la naturaleza de la matemática, el idealismo de la matemática, matemática pura versus matemática aplicada, etc.

Estos diálogos pueden ser usados por los docentes para introducir problemas básicos de la historia y posiblemente de la filosofía de la matemática y generar discusiones en torno de alguna de las cuestiones que en ellos se presentan.

En el siguiente fragmento del Diálogo sobre las Aplicaciones de la Matemática, en el que participan Herón y Arquímides, por ejemplo, se tratan temas relacionados con las aplicaciones de la matemática, con la necesidad de la modelización matemática para las ciencias empíricas y con la matemática pura y aplicada:

> HERÓN: (…) Pienso que para aplicar la matemática se debe poseer primero un sentido práctico adecuado. Esto me conduce a la primera pregunta. ¿Cuál es realmente el secreto de la nueva ciencia que tú has inventado –me permites llamarla matemática aplicada– ? Y ¿cuál es la principal diferencia entre tu matemática aplicada y esa clase de matemática –llamémosla matemática pura– que se enseña en las escuelas?
>
> ARQUÍMEDES: Lamento tener que contrariarte. No existe otra clase de matemática además de la que tus maestros te enseñaron, y no sin éxito, como puedo recordar. La matemática aplicada, como un arte diferente y separado de la matemática como un todo, no existe! Mi secreto está bien guardado porque no es tal; su evidencia es su mejor máscara. Está oculto como una moneda de oro arrojada en el polvo de los caminos.
>
> HERÓN: ¿Quieres decir que tus máquinas maravillosas se basan en una clase de matemática que todo hombre educado conoce?
>
> ARQUÍMEDES: Estás muy próximo a la verdad.
>
> HERÓN: ¿Puedes darme un ejemplo? Bueno, podemos tomar como ejemplo los espejos (…). Lo que hice fue simplemente recordar una propiedad bien conocida de la parábola: toma cualquier punto P de la parábola, lo unes al foco y trazas una paralela al eje por P. Estas rectas forman ángulos iguales con la tangente a la parábola en el punto P. Puedes encontrar este teorema en los libros de mis distinguidos colegas de Alejandría (…).
>
> HERÓN: Pienso que has inventado nuevas leyes de óptica.
>
> ARQUÍMEDES: La óptica es, después de todo, nada más que una rama de la geometría. Lo que he utilizado de la óptica, la ley de reflexión de un rayo, era conocida desde hace mucho tiempo.
>
> HERÓN: ¿Quieres decir que para aplicar matemática no es necesario obtener nuevos resultados, solamente ajustar a una situación práctica y su contraparte matemática, alguna proposición matemática bien conocida?
>
> ARQUÍMEDES: No, no es tan simple. Ocurre a menudo que el teorema que necesitamos no existe y uno debe encontrarlo y probarlo por sí mismo. (…) se pueden construir diferentes modelos matemáticos para la misma

> situación práctica y uno debe elegir el más apropiado, aquél que aproxima la situación más justamente como requieren los propósitos prácticos. (…) Por otra parte, el mismo modelo matemático puede ser utilizado para adecuar diferentes situaciones prácticas. Por ejemplo, también he utilizado las propiedades de las parábolas para construir catapultas, ya que el curso de una piedra lanzada por una catapulta puede aproximarse en buena medida por una parábola o para calcular cuán profundo se sumergiría un barco en el mar bajo el peso de su carga. (…) Mi experiencia me ha enseñado que, aún en el caso de un modelo matemático imperfecto, éste nos ayuda a comprender mejor la situación práctica, porque tratando de formular el modelo estamos forzados a pensar sobre todas las posibilidades lógicas, a definir todas las nociones sin ambigüedades, y a distinguir entre los factores importantes de los secundarios. Aún si el modelo nos conduce a resultados que no están de acuerdo con los hechos, su fracaso nos puede ayudar a encontrar otro mejor. (Rényi, 1990).

En el fragmento que sigue del Diálogo Socrático sobre la Matemática, en el que intervienen Sócrates e Hipócrates, Rényi plantea una discusión sobre la naturaleza de la matemática:

> SÓCRATES: Bien, dime entonces: ¿sabes qué es la matemática? Supongo que puedes definirla ya que deseas estudiarla.
>
> HIPÓCRATES: Pienso que un niño puede hacerlo. La matemática es una de las ciencias y una de las más admirables.
>
> SÓCRATES: No te he pedido que alabes a la matemática, sino que describas su naturaleza. Por ejemplo, si te interrogo sobre el oficio de los médicos me responderías que se trata de la salud y de la enfermedad y que su finalidad es curar los enfermos y preservar la salud. ¿Estoy en lo cierto?
>
> HIPÓCRATES: Exactamente.
>
> SÓCRATES: Respóndeme entonces lo siguiente: ¿el oficio de los médicos trata con algo existente o con algo que no existe? Si no existiesen los médicos, ¿existirían las enfermedades?
>
> HIPÓCRATES: Seguramente y más que en la actualidad.
>
> (…)
>
> SÓCRATES: Y si afirmo que todo oficio trata con algo que existe estarías de acuerdo?
>
> HIPÓCRATES: Completamente.
>
> SÓCRATES: Dime ahora, mi joven amigo, ¿cuál es el objeto de la matemática? ¿Qué objetos estudian los matemáticos?
>
> HIPÓCRATES: Le he planteado a Teeteto la misma pregunta y el me contestó que un matemático estudia los números y formas geométricas.
>
> SÓCRATES: Bien (…) ¿pero podrías afirmar que estas cosas existen? (…). (Rényi, 1989).

Sin duda los llamados diálogos socráticos de Rényi, son un ejemplo contemporáneo de las virtudes de los diálogos como método expositivo de ideas.

Kline: su pensamiento crítico

Morris Kline nació en Booklyn en 1908 y murió en 1992. Fue profesor de matemática en la Universidad de Nueva York y escribió en 1973 un libro cuyo título original es *¿Por qué Juanito no sabe sumar? El fracaso de la matemática moderna.*

Sin duda la búsqueda de la formalización, que caracterizó en gran medida a la matemática de finales del siglo XIX y principios del siglo XX, tuvo una influencia importante en las reformas educativas que se gestaron en el mundo en la década de los 50. Kline, en este libro, intenta llamar la atención sobre el fanatismo con el que una gran parte de los docentes de matemática había abrazado esta moda pedagógica. El texto es una incisiva y razonada *refutación* de la llamada "matemática moderna", unida a un llamado a la reflexión sobre la necesidad de que los docentes admitan su error y busquen un remedio eficaz.

En el primer capítulo titulado "Una muestra de la matemática moderna" ilustra, usando la ironía y bajo la forma de un *diálogo*, una clase típica del llamado plan de la matemática moderna.

> Echemos un vistazo a una clase de matemática moderna. La maestra pregunta:
>
> «¿Por qué es 2 + 3 = 3 +2?»
>
> Los estudiantes responden decididamente:
>
> «Porque ambos son iguales a 5.»
>
> «No –reprueba la profesora–, la respuesta correcta es: porque se cumple la propiedad conmutativa de la suma.»
>
> La siguiente pregunta es:
>
> «¿Por qué 9+2= 11?»
>
> De nuevo los estudiantes responden a la vez:
>
> «9 y 1 son 10 y 1 más son 11.»
>
> «Falso —exclama la profesora—. La respuesta correcta es que, por definición de 2, 9+2=9+(1+1). Pero como se cumple la propiedad asociativa de la suma, 9 + (1+1)= (9+1) + 1. Ahora bien, 9+1 son 10, por definición de 10, y 10 + 1 son 11 por definición de 11.»
>
> Evidentemente, la clase no lo está haciendo muy bien, así que la maestra plantea una pregunta más sencilla:
>
> «¿7 es un número? » (…)
>
> Cansada, pero no vencida, la maestra pregunta una vez más:
>
> «¿Cuánto es n 2 dividido por 4?»
>
> Un brillante estudiante dice sin dudar: «Menos 2.»
>
> «¿Cómo has obtenido ese resultado?», pregunta la maestra.
>
> «Bien —dice el alumno—, usted nos ha enseñado que la división es una substracción repetida. Yo resté 4 de 2 y saqué menos 2.»
>
> Podría parecer que los pobres chicos se habían hecho merecedores de algún descanso después de la escuela, pero no; los padres, ansiosos por conocer los progresos hechos por sus niños, también les preguntan. Un padre le pregunta a su hijo de ocho años:

«¿Cuántas son 5+3?»

Por toda respuesta obtiene que 5+3=3+5, por la propiedad conmutativa. Asombrado, vuelve a preguntar: «Pero, ¿cuántas son 5 manzanas y 3 manzanas?»

El niño no comprende bien que «y» significa «más» y pregunta:

«¿Quieres decir 5 manzanas más 3 manzanas?»

El padre se apresura a responder afirmativamente y espera atento.

«0h! –dice el niño–, no importa si son manzanas, peras o libros; en cada caso, 5+3=3+5.»

Otro padre, preocupado por los progresos de su hijo en aritmética, le pregunta cómo va.

No muy bien –responde el niño–. La maestra se dedica a hablar de las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva. Yo hago las sumas bien, pero a ella no le gustan. (…) (Kline, 1976).

Podría decirse que éste es un diálogo paradigmático, una suerte de arquetipo caricaturizado con gran valor didáctico, ya que en sólo tres páginas incita a la reflexión y discusión de las ideas que en el resto de su texto expondrá. Entre ellas señala, que en el nuevo plan: "(…) se subrayan sofisticadas versiones finales de ideas simples, mientras que se tratan superficialmente las ideas más profundas, lo que conduce necesariamente al dogmatismo y al aprendizaje mecánico de nuevas rutinas mucho más inútiles que las rutinas tradicionales". (Kline, 1976).

Consideraciones finales

Se ha intentado en este breve trabajo mostrar *el valor del diálogo* en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática que, desde el mundo griego hasta hoy, sigue teniendo vigencia.

La mayeútica de Sócrates, como señaláramos antes, consiste esencialmente en emplear el diálogo para llegar al conocimiento. ¿Qué es lo que comparten estos matemáticos contemporáneos con ella?

Se podría decir que, básicamente, todos tienen un método de trabajo basado en la interrogación, ya sea por razones de índole filosófica, científico-didáctica o científico-filosófica. Estos matemáticos, que en su obra responden a un modo de pensar que esencialmente no es dogmático, han utilizado el *diálogo* como herramienta de comunicación y todos, a pesar de sus diferencias, han aprovechado las virtudes del diálogo para lograr sus propósitos:

- En El Menón, Sócrates *dialoga con el esclavo* y utiliza esta conversación para convencer a Menón de su teoría de la reminiscencia. Aquí se utiliza un *diálogo dentro de un diálogo* para "demostrar una teoría".

- Polya, en su *diálogo con el lector*, nos muestra como funciona su método para enseñar a resolver problemas a través de *diálogos ficticios entre un docente y un posible alumno.* Se utilizan *diálogos, dentro de un gran diálogo* para enseñar a enseñar métodos de resolución de problemas.

- Rényi, a través de sus *diálogos,* que son ingeniosos *textos de divulgación*, presenta ideas de elevada complejidad a personas que no son expertos y que, de otro modo, requerirían de mucho tiempo y de una formación académica más compleja para comprenderlas. Son *diálogos didácticos* para facilitar la comprensión de ideas.

- Kline, a través de un *diálogo figurado*, muestra de modo contundente las terribles fallas de lo que llama "el nuevo currículo matemático". Es un *diálogo para refutar* una postura.

Este trabajo ha intentado mostrar inductivamente, con los ejemplos anteriores, que el diálogo es un recurso potente, que contribuye a reflexionar, exponer, analizar y criticar ideas, en la mayor parte de los casos, de gran profundidad. Sus ilimitadas posibilidades de utilización en la enseñanza, lo convierten también en una herramienta didáctica fundamental en el aprendizaje del quehacer matemático.

Bibliografía

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad.

BREHIER, É. (1956): *Historia de la filosofía.* Buenos Aires: Sudamericana.

FERRATER MORA, J. (1969): *Diccionario de filosofía.* Buenos Aires: Sudamericana.

KLINE, M. (1976): *Por qué Juanito no sabe sumar. El fracaso de la matemática moderna* . Madrid: Siglo XXI.

PLATÓN (2004): *Menón*. Bogotá: Editorial Universitaria,

POLYA, G. (1979): *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

RÉNYI, A. (1990): "Diálogo sobre las aplicaciones de la matemática", en: *Revista de Educación Matemática,* vol. 5 (1). Córdoba, Argentina: UMA.

— (1989): "Dialogo socrático sobre la matemática", en: *Revista de Educación Matemática,* vol. 4 (3). Córdoba, Argentina: UMA.