Propuesta minimal de ejercicios para el tratamiento de las funciones en la asignatura Matemática Básica

YASER VÁZQUEZ ALFONSO
Universidad Agraria de La Habana, Cuba

Introducción

La asignatura de Matemática, en cualquier grado de enseñanza escolar, (del primario al universitario, incluyendo la ocurrencia de postgrados, maestrías y doctorados que podrían tener cabida a continuación) habitualmente, y debido a su innegable complejidad, desarrollo, y elevado nivel de abstracción que exige de quienes la estudian, ha constituido una de las materias más fuertes a la hora de comprenderla.

A partir de esta certidumbre, se considera loable cualquier intención creativa que pudiera ayudar a la comprensión de algunos de los disímiles aspectos que con mayor asiduidad aparecen en ella.

Desde que en 1637 el matemático francés René Descartes usara por primera vez el término función para designar una potencia x^n de la variable x, y las subsiguientes designaciones que le sucedieron, hasta llegar a entenderse de manera general como la relación entre dos magnitudes, de modo que a cada valor de una de ellas le corresponde determinado valor de la otra, el trabajo con expresiones matemáticas se expandió por sobre las funciones y se ha ganado un lugar dentro de la lista que conforman esos disímiles aspectos citados con anterioridad.

La metodología del estudio de las funciones, por su parte, ha demostrado que el apoyo gráfico ayuda considerablemente al entendimiento del comportamiento de algunas de las mismas. De esta manera, paralelamente al impulso que ganó el trabajo con las funciones matemáticas, se desarrolló la práctica de representarlas en un plano n-dimensional.

La necesidad real de crear una propuesta de ejercicios que auxiliara a los estudiantes en la operación de graficar algunas funciones consideradas básicas dentro del contenido de su curso de Matemática, fue la causa y el punto de partida de este trabajo.

Desarrollo

El concepto de función está implícito en las matemáticas desde las primeras civilizaciones y ello puede inferirse del estudio de las tablillas de barro babilónicas de la colección Plimpton, que datan del año 1900 a.n.e.

Se tiene la certeza de su origen práctico y su vinculación a las necesidades del hombre; pues tal como la numeración surge ante las necesidades creadas por el intercambio, los descubrimientos geométricos son impulsados por las construcciones y las divisiones de los terrenos, las funciones surgen a partir de la relación entre cantidades que varían, una en dependencia de otras.

Se puede encontrar una noción vaga de este concepto bajo la forma de tablas de correspondencias que provienen de la observación de fenómenos naturales, ya que la idea de función está ligada históricamente a la percepción de correlaciones entre los fenómenos de la naturaleza, así la primera noción de función se encuentra en las tablillas astronómicas del período seleucida. Sobre estas tablillas, existen relaciones aritméticas que provienen de la observación de fenómenos análogos, por ejemplo los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular del mismo al Sol.

La aceptación intuitiva de la dependencia funcional como manifestación de una relación de causa y efecto en un fenómeno, en diferentes situaciones, ha sido natural desde los tiempos remotos. Una larga historia poseen los intentos de expresar esta dependencia funcional entre cantidades variables a través de la matemática.

El concepto dependencia funcional se manifiesta matemáticamente, por primera vez, en la expresión de la variación de los parámetros que determinaban un lugar geométrico, a través de una tabla numérica.

En los trabajos de constatación, para determinar las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las funciones en el nivel preparatorio, se ha podido precisar que estas dependen de múltiples factores, pero fundamentalmente de la creencia que tienen los profesores acerca de qué es la matemática, cómo enseñarla y para qué se aprenden estos contenidos en la escuela. Los resultados obtenidos apuntan hacia las afirmaciones siguientes, que caracterizan el proceso de enseñanza-aprendizaje de estos contenidos en el preuniversitario.

- El papel protagónico lo juega el profesor, este trasmite contenidos sin propiciar la búsqueda de estos por los estudiantes, lo que limita considerablemente la posibilidad de los alumnos para transferir estos conocimientos a otros contextos.
- Los alumnos tienen tendencia a la ejecución inmediata, si el ejercicio o problema hay que pensarlo más de 3 minutos renuncian a su solución, consideran no estar preparados para esa tarea.
- Creencia de los profesores sobre lo que significa saber Matemáticas, esto trae por consecuencia que sólo se debe enseñar lo que "explícitamente va a prueba de ingreso a la Educación Superior", y que predomine un tipo de instrucción que renuncia tácitamente a la teoría y absolutiza la resolución de ejercicios como única vía de aprendizaje de esta ciencia.
- Formalismo en la enseñanza de la Matemática, manifestado en el divorcio evidente que existe entre contenido y forma, o entre sintaxis y semántica en la enseñanza de estos contenidos, lo que repercute en su asimilación y en la posibilidad posterior de aplicar los conocimientos a situaciones no discutidas en el salón de clases.
- No se domina el trabajo sistemático con el diagnóstico, y en los casos que este se realiza es formal, no se le da seguimiento y no constituye un instrumento de trabajo que permita armonizar la relación diagnóstico-pronóstico-resultados.

- Se imparten y evalúan sólo los contenidos del grado, y por lo tanto no se materializa el principio de la sistematicidad de los conocimientos.
- Las clases de ejercitación, que representan más del 80% de los programas de estudio, no son variadas de manera tal que incluyan ejercicios sin solución, con varias soluciones y con soluciones únicas, y el trabajo independiente dentro de este tipo de clases es prácticamente nulo, por la intervención continúa por parte del profesor.

Cabe preguntarse entonces si los contenidos que aparecen en el currículo son los que realmente necesitan los estudiantes para el desarrollo profesional o social, o si el problema radica en cómo se produce el proceso de aprendizaje. Esto ha motivado la investigación de nuevas dimensiones, es decir no sólo centrarse en lo que se debe estudiar, y cómo enseñarlo, sino en la forma en que se debe producir el aprendizaje.

A partir de todo lo dicho anteriormente es que se procede a la elaboración de la propuesta minimal de ejercicios sobre funciones.

Propuesta minimal de ejercicios sobre funciones

Al finalizar el estudio de las funciones, en la asignatura de Matemática se elaboró el siguiente conjunto de ejercicios que constituyen las exigencias mínimas que debe dominar un estudiante al finalizar estos contenidos.

1) Representa en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos cuyas coordenadas se dan a continuación:

   a) (3;0) b) (0;3) c) (0;0) d) (2;8) e) (-3;5) f) (-1;-1) g) (4;-6) h) (1/2;-5) i) (-0.4;3/2)

2) Represento en el plano los puntos cuyas coordenadas se indican. Determina, además, las coordenadas de P'.

   a) P(4;6) y P' simétrico de P respecto al eje de las abcisas.

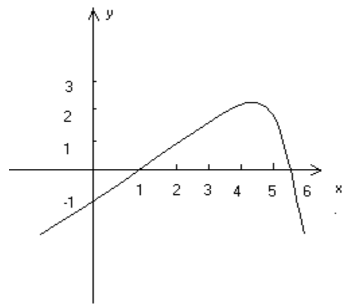
   b) P(-2;3) y P' simétrico de P respecto al eje de las ordenadas.

   c) P(-1;-4) y P' simétrico de P respecto al origen de coordenadas.

3) La función f está dada por el gráfico que aparece en la figura 3.13.

   a) Determina f(o); f(1); f(2); f(4) y f(6).

   b) Determina el valor de x si f(x) = 0; f(x) = 1; f(x) = 2.



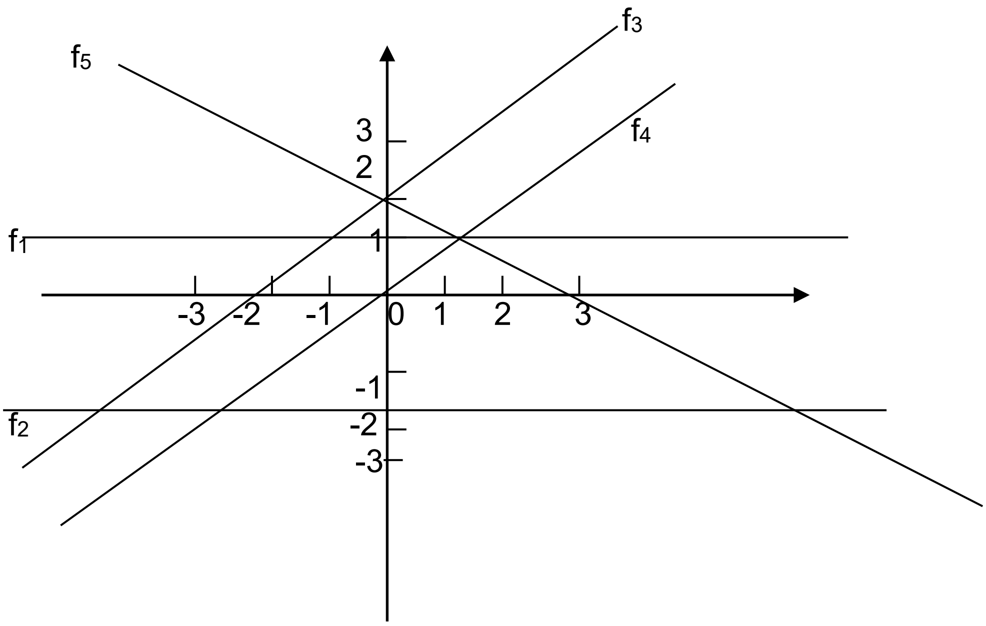
4) Determina cuáles de las siguientes ecuaciones definen funciones lineales:

   a) y = x – 2 b) y = 3x c) y = x^2 d) y = 3/x + 1, x = 0 e) y = x^3 + 5 f) y = x/5 g) y = $\sqrt{2}$
   h) 3x + y = 0 i) x + 2y = 8

5) Comprueba si los puntos siguientes pertenecen a la representación gráfica de la función $y = 8x + 3$.

   a) $P_1(0;2)$ b) $P_2(1;11)$ c) $P_3(0;3)$ d) $P_4(-1;5)$

6) Escribe las ecuaciones que definen las funciones representadas en la figura:



7) Determina para qué valores de “x” la función:

   a) $y = 5x + 8$. Toma el valor 4.

   b) $y = 12 – x$. Toma el valor $–2/5$.

   c) $y = -2x –5$. Toma el valor 0.4.

   d) $y = - x$. Toma el valor $\sqrt{3}$.

8) De una función lineal se sabe que su cero es –4 y que interseca al eje “y” en el punto de ordenada –21/2. Represéntala gráficamente.

9) Representa gráficamente las funciones lineales siguientes:

   a) $y = x$ b) $y = - 1/2\, x$ c) $y = x + 2$ d) $y + x = 2$ e) $y = 8 - 3x$

10) Determina la ecuación de la función lineal cuyo gráfico pasa por los puntos:

   a) A (0;0) y B (-1;3) b) M (-1;2) y N (0;-2) c) P(2;3) y Q (-5;4)

11) Determina cuáles de las siguientes ecuaciones representan funciones cuadráticas y cuáles no. Fundamenta tu respuesta.

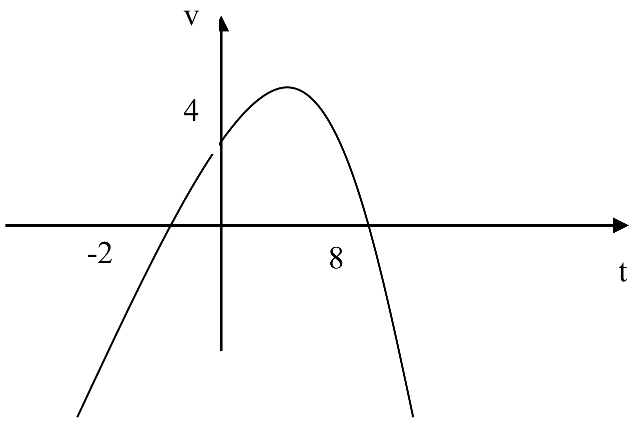
   a) $y = \dfrac{1}{x^2}$ b) $y = -x^2 + 5$ c) $x = -y^2+3y-1$ d) $y = 2x^2 + 3x$ e) $y = x^2 + 0.5$ f) $y^2+x^2 =1$

g) $v = at^2 + 3t$

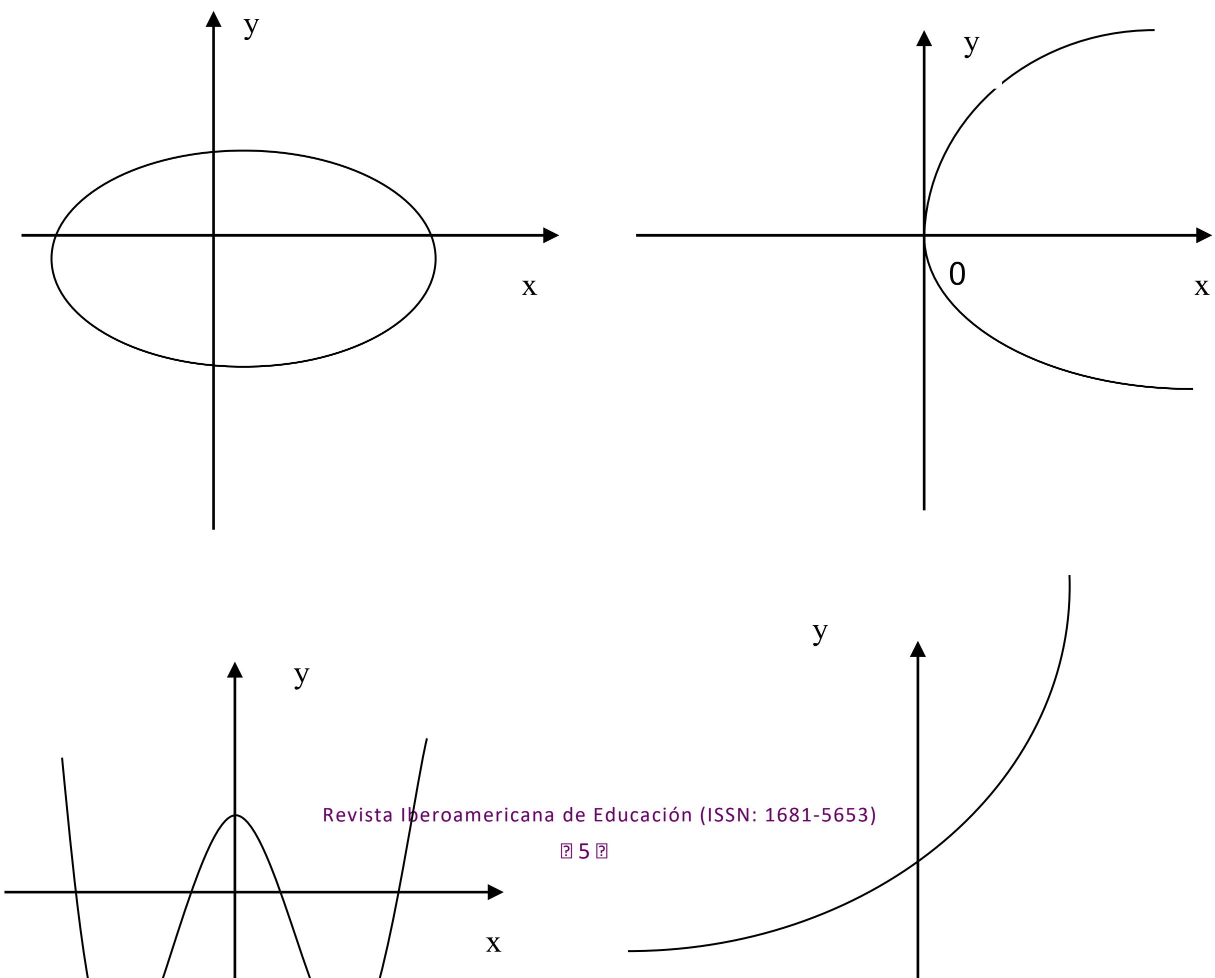
12) Determina la ecuación de una función de la forma $y = ax^2$ ($a \neq 0$) cuyo gráfico pasa por los puntos:

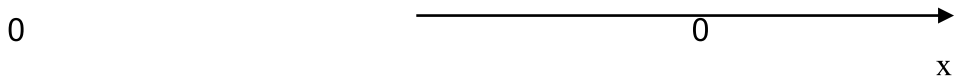
a) A (1;2) b) B(-3;-3) c) C(1; 4) d) D (2; -3)

13) Determina la ecuación de la función cuadrática representada en la figura.

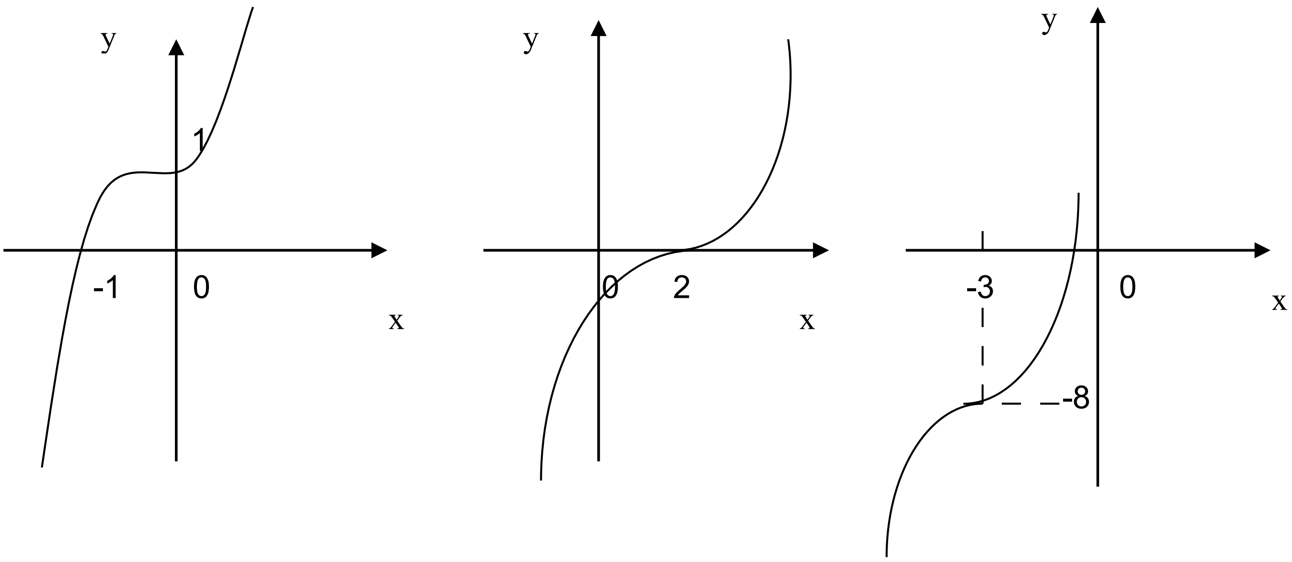


14) Determina cuáles de las representaciones gráficas de la figura son funciones y de ellas cuáles son inyectivas. Considera conjuntos de pares de la forma (x;y) y (y;x).





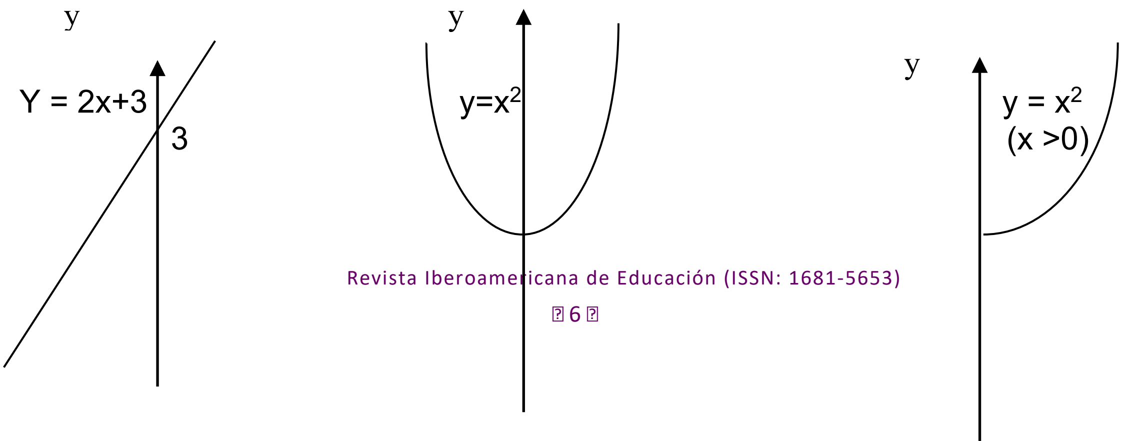
15) Los gráficos de la figura corresponden a funciones del tipo $f(x) = (x + b)^3 + c$. Escribe la ecuación que le corresponde a cada caso.

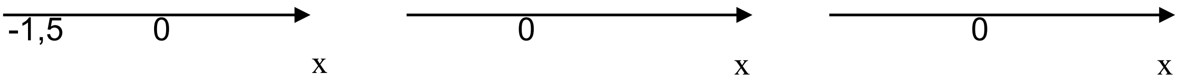


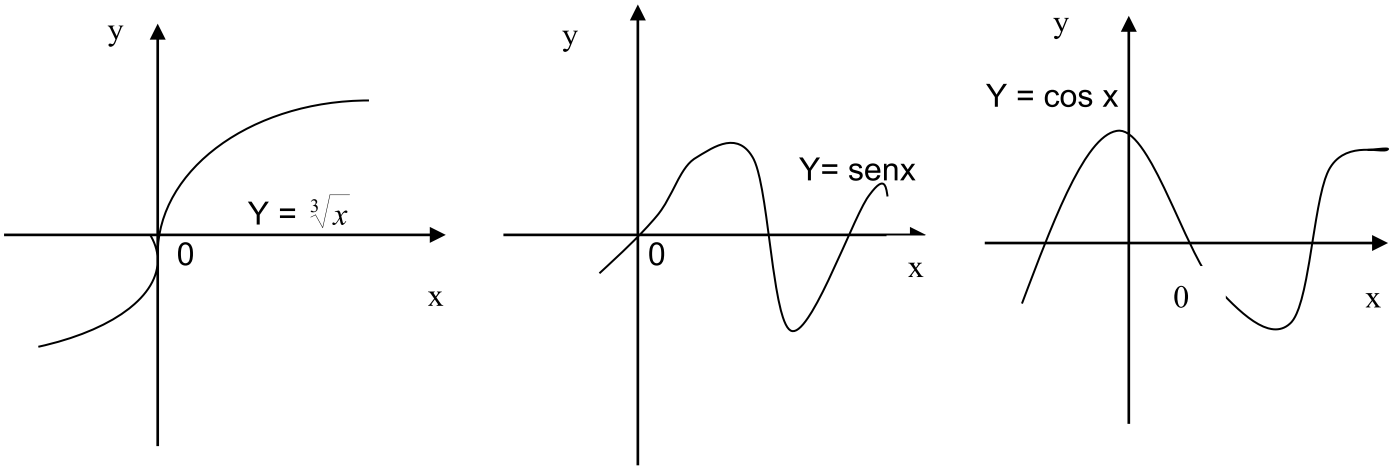
16) Determina los valores b y c de la ecuación $y = (x + b)^3 + c$ si el gráfico de la función contiene a los puntos:

a) (-b;2) y (1;-6) b) (0;0) y (-2;8) c) (0;-1) y (1;6) d) (0; 123) y (-4;-1) e) (3;5) y(5;7)
f) (-b;b) y (3;-1)

17) Dados los gráficos de las funciones representadas en la figura, analiza si se puede determinar la función inversa. Fundamenta.







18) Sean las funciones: $f(x)= 5^x$; $g(x)= 5^x – 1$; $h(x)= 5^{x+3}$; $p(x)= 5^{x+3} – 1$

Determina:

a) Dominio e imagen de estas funciones.

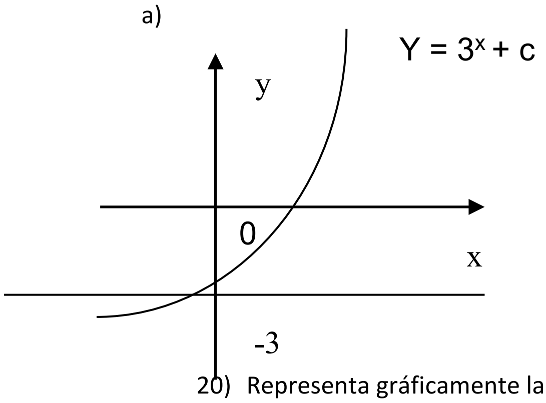
b) Ceros en caso de que existan.

c) ¿Para qué valor de x se cumple que:

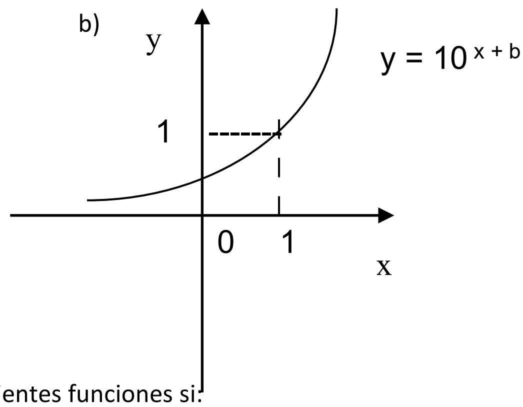
$$f(x)= \sqrt[3]{5} \ ; \ g(x) – 4 = 0 \ ; \ h(x+6) = \frac{1}{25} \ ?$$

19) Determina la ecuación de las funciones cuyos gráficos, se muestran en la figura. Analiza sus propiedades.

a)



b)



20) Representa gráficamente las siguientes funciones si:

$f(x)= \log_5 x – 1$; $g(x)= \log_5 (x + 0.5)$; $m(x)= \log_5 (x – 5) + 1$

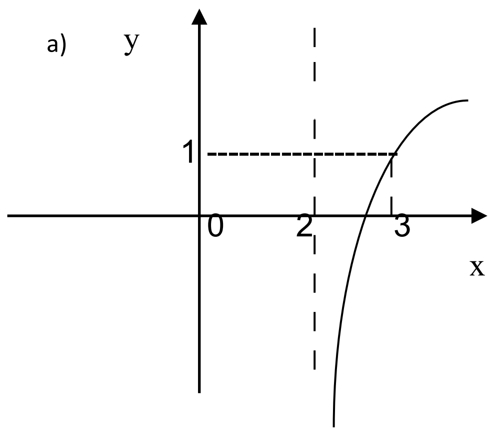
a) Determina el dominio y la imagen de f,g,m.

b) Calcula su cero

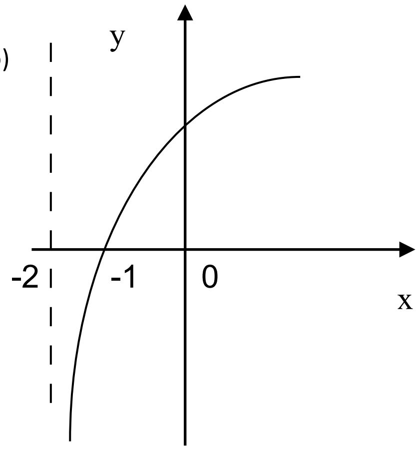
c) Calcula x si: f(x)= - 3; g(x)= 1; m(x)= 2.

21) Los gráficos siguientes representan funciones del tipo y= $\log_3 (x + b) + c$, en cada caso:

a)



b)



a) Escribe su ecuación.

b) Determina los valores de x para los que está definida la función.

c) Halla su cero.

d) Escribe las coordenadas de los puntos P_1, P_2, P_3 sus ordenadas son 2,-1, y ½ respectivamente.

e) Escribe las coordenadas de los puntos Q_1,Q_2,Q_3 sus abscisas son 25, -5/3, y 0 respectivamente.

Por último, y con el objetivo de que se tenga una idea más clara de los resultados obtenidos, se mostrarán las estrategias seguidas en el proyecto para que los alumnos pudieran transferir la definición de cero, que sobre funciones lineales ya poseen, a la función g con g(x)=senx.

Actividades

1) Se les pregunta a los alumnos el concepto de “cero” de una función lineal. Estos deben responder que “si f con f(x)=mx+n, $m \in R$, $n \in R$, es una función lineal, entonces x_o, es un cero de f si y sólo si $f(x_o)=0$”.

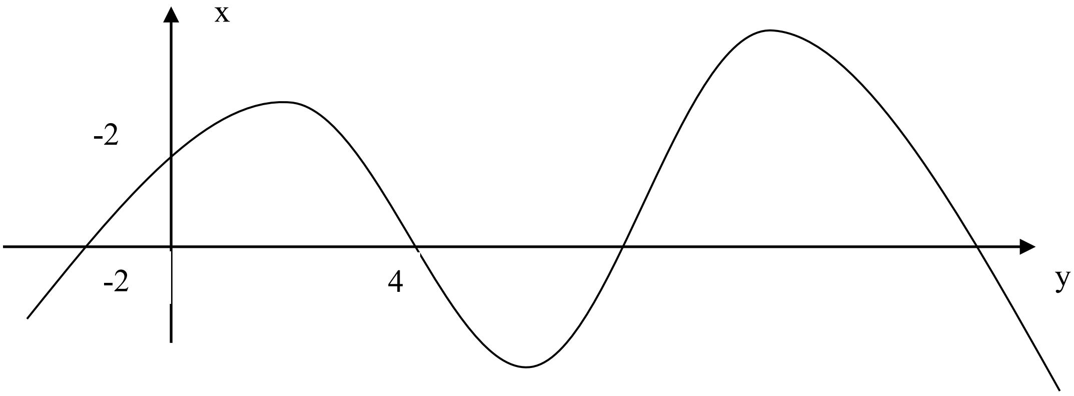
1.1) ¿Cómo se puede hallar este valor?

La respuesta de los estudiantes debe ser mx+n=0 de donde, x=$\frac{-n}{m}$. Con esto se concluye que el procedimiento es igualar la ecuación funcional a 0, pues los pares que pertenecen a la función tienen la forma (x;0).

2) Se les pide a los alumnos que expliquen por qué las funciones lineales tienen a lo sumo, sólo un cero.

3) Se propone a continuación el siguiente ejercicio con el objetivo de transferir el concepto de cero a cualquier gráfico.

En el gráfico siguiente determine las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados.



Obsérvese que hay puntos cuya segunda componente en el par es 0, hay otros que no; pero hay también puntos para los cuales no existe información que permita determinar sus coordenadas. También que el eje vertical es "x", y el horizontal es "y". Este tipo de actividad permite desarrollar el pensamiento "flexible y divergente" de los estudiantes.

4) La discusión a partir del protagonismo de los estudiantes debe aportar la definición de cero, y el procedimiento de cálculo por reflexiones sobre el contenido para su determinación.

5) La evaluación del proceso permitirá a los alumnos valorar si el concepto de cero, para la función seno, se adecua al concepto que se tenía para las funciones lineales, o si es necesario transformarlo.

6) Los resultados obtenidos son alentadores pues se ha logrado una mayor independencia cognoscitiva por parte de los estudiantes y que ellos ocupen el papel protagónico que les corresponde en el proceso de aprendizaje.

Conclusiones

Lograr un aprendizaje efectivo en los estudiantes de la Preparatoria, es una aspiración a la que no se debe renunciar, por lo que se buscan vías y nuevos métodos para posibilitarlo, es por esto que proponemos la realización de este tipo de trabajos que a la vez propicia la formación científica pedagógica de los estudiantes, les muestra una forma de actuar que es transferible a otros contenidos dentro de la asignatura y fuera de esta.

La aplicación de la propuesta de ejercicios para la enseñanza de las funciones, posibilita la solidez de los conocimientos, y ha demostrado resultados alentadores en su aplicación práctica para el desarrollo del proceso docente educativo en este nivel, luego esta experiencia en la asignatura de Matemática en la facultad de preparatoria abre una importante perspectiva en el campo de la innovación pedagógica.

Este trabajo puede resultar una fuente de información para los profesores de Preparatoria o de Preuniversitario incidiendo en el aumento de la calidad de las clases.

A partir del trabajo realizado se propone:

- Contribuir a despertar el interés por el aprendizaje de las funciones objeto de estudio de esta metodología.
- Que el presente trabajo, sea tomado como fuente de referencia por los profesores, con el propósito de documentarse metodológicamente e informarse acerca de la variedad de actividades que pueden realizarse para lograr la eficacia del aprendizaje.

Bibliografía

BALLESTER, Sergio (1995): *La sistematización de los conocimientos matemáticos.* Editorial Academia, Ciudad de La Habana.

— , y ARANGO, C. (1995): *Cómo consolidar conocimientos matemáticos.* Editorial Academia, Ciudad de La Habana.

BALLESTER, S., y otros (1992): *Metodología de la enseñanza de la Matemática.* Editorial Pueblo y Educación, tomo 1, Ciudad de La Habana.

BELMONT, J. (1991): “Estrategias cognoscitivas y aprendizaje estratégico”, en *Revista Acción Pedagógica,* vol. 2, n.º 1, 2, pp. 56-72.

BERMÚDEZ, R., y RODRÍGUEZ, M. (1996): *Teoría y metodología del aprendizaje.* Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

BRUECKNER, L., y BOND, G. (1968): *Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje.* Edición revolucionaria. La Habana.

LÓPEZ HURTADO, J. L., y otros (1993): "La asimilación de conocimientos y la activación intelectual en escolares", Pedagogía'93, La Habana.

CAMPISTROUS, Luis, y otros (1989 y 1990): *Matemática. Orientaciones metodológicas. 10.º grado.* Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.

— (1990): *Matemática. 10.º grado.* Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

— (1990): *Matemática. 11.º grado.* Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana.

— (1990): *Matemática. 12.º grado.* Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana.

— (1990): *Matemática. Orientaciones metodológicas. 11.º grado.* Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

CASTELLANO, Doris, y GRUEIRO, Irene (1996): *¿Puede ser el maestro un facilitador? Una reflexión sobre la inteligencia y su desarrollo.* Ediciones IPLAC-CESOFTE, La Habana.

COLECTIVO DE AUTORES (1984): *Pedagogía*. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

DUBINSKY, E. (1996): “El aprendizaje cooperativo de las Matemáticas en una sociedad no cooperativa”, en *Revista Cubana de Educación Superior,* n.º 2-3, CEPES, Universidad de La Habana.

GARCÍA-VERA, A. B. (1987): “Fundamentación de un método de enseñanza basado en la resolución de problemas”, en *Revista de Educación*, n.º 282, pp. 151-160.

GÓMEZ HERNÁNDEZ, Mario Armando (2002): “La transferencia en el uso del conocimiento sobre funciones, una necesidad de las matemáticas escolares”. Presentado en Congreso de Didáctica de las Ciencias, La Habana, febrero.

GUZMÁN, M. (1992): *Tendencias innovadoras en educación matemática. Olimpiada Matemática Argentina.*

JUNGK, Werner (1982): *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática.* Tres partes. Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

LABARRERE, Alberto (1987): "La formación de procedimientos generales para la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria", en *Revista Ciencias Pedagógicas*, n.º 14, Ciudad de La Habana, enero-junio.

MINED (1990): *Matemática. Programa de 11.º grado.* Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

MUÑOZ, Féliz, y otros (1989): *Matemática. 7.º grado.* Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

— (1990): *Matemática. 8.º grado.* Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

— (1991): *Matemática. 9.º grado.* Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

— (1989): *Matemática. Orientaciones metodológicas. 7.º grado.* Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de La Habana.

— (1990): *Matemática. Orientaciones metodológicas. 8.º grado.* Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.

— (1991): *Matemática. Orientaciones metodológicas. 9.º grado.* Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.

SANTOS, Luz Manuel (1996): *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamericano, México, p. 52.

SANTOS TRIGO, Luz Manuel (1995): "La transferencia en el uso del conocimiento, un paso necesario en el aprendizaje de la Matemática", en *Memorias de RELME XIV.* La Habana.

SOSA, Yoanny, y CASTILLO, Julio (1999): "Sistema de clases sobre la Unidad n.º 2. Funciones lineales teniendo en cuenta el nuevo enfoque para la asignatura". Trabajo de Diploma. Ciudad de La Habana, p. 77.

TORRES, Paul (1993): "La enseñanza problémica de la Matemática de nivel medio general". Tesis de grado. Ciudad de La Habana.

VALENCIA, Teresita (1987): "¿Cómo contribuir al desarrollo del pensamiento durante la clase?", en *Revista Educación,* n.º 64, enero-marzo.

VÁZQUEZ, Yasser, y GUTIÉRREZ, Yosdán. "Propuesta metodológica para aplicar el aprendizaje por descubrimiento en la Unidad n.º 1. Funciones exponenciales y logarítmicas". Trabajo de Curso. Provincia Habana, p. 37.

VELÁZQUEZ DE CASTRO, M. (1994): "Habilidades para el aprendizaje", en *Comunidad Escolar,* vol. 12 (450), Madrid, abril.

Correo electrónico: yasser@isch.edu.cu