# Una taxonomía de errores en el aprendizaje de espacios vectoriales

ANA ROSSO
JULIO BARROS
Universidad Nacional de Río Cuarto, Córdoba, Argentina.

## 1. Introducción

Al abordar la enseñanza del objeto *espacios vectoriales* (y del Álgebra Lineal como objeto más amplio), pretendemos conducir a nuestros alumnos por las *calles rectas y regulares* de la formalización, mostrando una teoría unificada y generalizada sin mencionar siquiera que estamos mostrando los *suburbios de un lenguaje* recientemente anexado al lenguaje de las matemáticas.

Según Kaput (1987), el Álgebra Lineal es compleja tanto en sus estructuras como en la multiplicidad de sus representaciones; además su estudio permite combinar la abstracción y la aplicación. Con el estudio de la teoría es posible desarrollar el razonamiento matemático y la transferencia de esos conocimientos permite realizar interesantes aplicaciones; pero en el proceso de su enseñanza y aprendizaje se presentan dificultades asociadas al carácter abstracto de sus conceptos y a la variedad de lenguajes y representaciones semióticas. Entre esos lenguajes es común recurrir al *lenguaje geométrico* para ilustrar y puntualizar propiedades de los vectores en el plano y en el espacio, mientras que el *lenguaje aritmético* aporta las herramientas necesarias para operar con vectores, matrices, sistemas de ecuaciones, entre otras; y es el *lenguaje algebraico-abstracto* el que permite la generalización, formalización y caracterización de conceptos, factibles o no de representación geométrica. (Sierpinska, 1996), (Hillel, 2000).

Observando las dificultades que el uso de las diferentes representaciones semióticas producen en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y con miras a elaborar una propuesta didáctica que integre el uso de los distintos lenguajes, nos propusimos relevar los errores más frecuentes cometido por nuestros alumnos, al abordar el estudio de los conceptos de Espacio Vectorial y Subespacios.

## 2. Fundamentos teóricos

En la Teoría de las Situaciones Didácticas y en el constructivismo, el error es considerado como una herramienta fundamental para la construcción del conocimiento.

El desarrollo de la Teoría de las Situaciones Didácticas, Brousseau (1997), considera que el alumno construye su conocimiento personal al validar sus concepciones, en la interacción generada entre los participantes del proceso de enseñar y aprender. Sus concepciones son elaboradas poniendo en juego sus conocimientos previos para dar respuestas a las situaciones problemáticas. En los errores que tienen los estudiantes en su aprendizaje, quedan plasmadas las dificultades que subyacen en el abordaje de cada concepto, por lo que es necesario reflexionar acerca de sus significados y posibles causas.

Para la postura constructivista los errores son fuente de información de qué y cómo los estudiantes han aprendido. Rico (1995) sostiene que el error es una posibilidad permanente de adquisición y consolidación del conocimiento.

Es así que tener una taxonomía de los errores más frecuentes, será una herramienta facilitadora a la hora de elaborar secuencias didácticas que tengan en cuenta las dificultades más habituales en el proceso de aprender. Teniendo en mente la ventaja que presupone el contar con tal herramienta es que realizamos un estudio exploratorio, tomando en consideración las producciones de nuestros alumnos durante los años 2009, 2010, 2011, para realizar una clasificación de los errores y una comparación con algunas taxonomías a fin de establecer puntos en común y diferencias.

Entre las tipologías existentes para clasificar el error en el área de la matemática, hemos seleccionados tres: *Tipología de errores de Brousseau (2001)*, *Tipos de errores según Socas (1997)* y *Tipología de errores según Radatz (1979)***.**

# 3. Desarrollo

## 3.1 Contenidos y carga horaria

Es de hacer notar que este estudio lo hemos realizado en la asignatura Algebra Lineal I, cuyos contenidos mínimos y carga horaria (8 hs. Semanales) están establecidos en el plan de estudio correspondiente a las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática y Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales en la Universidad Nacional de Río Cuarto.

En este estudio exploratorio de tipo cualitativo hemos seleccionado los conceptos de Espacio Vectorial y Subespacio y realizado las siguientes consideraciones.

## 3.2 Metodología

3.1.1. Mapas conceptuales: La elaboración de mapas conceptuales fue una herramienta que nos permitió acordar la construcción, organización y relación entre los conceptos a enseñar.

3.1.2. Las evaluaciones y ejercicios de seguimiento[1] realizadas por los alumnos durante tres períodos académicos fue el material utilizado en nuestro estudio. De las evaluaciones tomadas se seleccionaron tres situaciones problemas significativas para nuestro análisis.

3.1.3. La muestra: hemos considerado los exámenes de los alumnos del profesorado y licenciatura de Matemática de distintos años, que cursan Algebra Lineal I, en el segundo cuatrimestre de primer año de las carreras antes mencionadas. Para este estudio se consideró una muestra de 105 exámenes.

3.1.4. Consideraciones Metodológicas: las relaciones entre los conceptos fueron explicitadas en el análisis de los mapas conceptuales. Ellas fueron la guía que facilitó del diseño de las situaciones problemas, en las cuales se contemplan el uso de diferentes representaciones semióticas. Realizamos una comparación con otras tipologías para ver si resultan considerados todos los casos observados en nuestra taxonomía y si los tipos son coherentes cuando un error está presente en las otras tipologías.

## 3.3 Situaciones seleccionadas

En las situaciones seleccionadas para este estudio exploratorio están presentes tanto el lenguaje algebraico como el aritmético. La interpretación geométrica es factible sólo en una situación. Los objetivos que se detallan a continuación permiten verificar si están presentes las relaciones explicitadas entre los conceptos.

*Objetivos*

- Evidenciar la aplicación de la condición de suficiencia para demostrar que un cierto ente es un subespacio de un espacio vectorial.
- Favorecer la realización de operaciones entre subespacios.
- Caracterizar los subespacios suma e intersección dando sus bases.
- Establecer las relaciones entre las dimensiones de los subespacios y la dimensión del subespacio suma.

*Consigna:* La consigna en cada caso fue dar respuesta a los ítems enunciados.

Situación problema 1

Sean W y S$\subset$ IR$^4$ los siguientes conjuntos: $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in IR^4 : x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$ y $W = gen\{(1,1,-2,5),(k,k,3,-k),(1,1,1,1)\}$

a) Calcular las posibles dimensiones de *W* en función del parámetro *k*.

b) Para el valor de *k* en el cual la dimensión de *W* es la menor, hallar los generadores de $S \cap W$.

[1] Problemas de seguimiento son problemas que se toman al finalizar cada unidad temática. El objetivo de estos ejercicios es poner al alumno en situación de examen para que pueda analizar como se encuentra su aprendizaje en referencia a los temas tratados.

Situación problema 2

Sea $S = gen\{(2,-1,1),(-1,0,1)\}$

a) Hallar ecuaciones que definan a *S*.

b) Hallar una base y la dimensión de *S*.

c) Dar una representación geométrica de *S*.

d) Encontrar generadores de un subespacio $U \subset IR^3$ tal que $U \oplus S = IR^3$

e) ¿Es único el subespacio *U*? Si es único justifique su respuesta. Si no lo es encuentre otro con dicha propiedad.

Situación problema 3

Sea $T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in IR^{2\times 2} / x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 - 2x_4 = 0 \right\}$ y

$W = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

a) Hallar la dimensión de W y la dimensión de T.

b) Hallar una base de $W \cap T$

c) Calcular dimensión de W+T.

# 4. Clasificación de los errores y sus posibles causas

## 4.1 Categorías de errores: Después del análisis de los casos particulares podemos establecer las siguientes categorías de errores:

Concurrencia de lenguajes: bajo esta designación se agrupan aquellos errores que provienen del uso de los lenguaje (aritmético-geométrico–algebraico) que se encuentran presentes en la enseñanza de estos conceptos. La necesidad de pasar de una forma de representación a otra, de manera constante, es una dificultad adicional a la hora de operar.

- La definición de los subespacios utilizando diferentes representaciones obstaculiza la aplicación de la técnica para identificar los elementos de cada subespacio y para operar convenientemente en función de lo solicitado. Las distintas formas de representación de los subespacios dificultan las operaciones con sus elementos y perturban la aplicación de la técnica necesaria para dar la respuesta; ya que desde lo algebraico hay poco manejo en el uso de las diferentes formas de representar subespacios. En particular, para interpretar y abstraer los elementos de cada ente.
- El lenguaje algebraico produce interferencias sobre el lenguaje aritmético a la hora de distinguir entre variables y parámetros. Se asumen como sinónimos símbolos con significado diferente, ignorando la dependencia existente entre ellos, llegando a establecer relaciones erróneas.

- La trasposición del lenguaje cotidiano al lenguaje formal produce "ruido" en la interpretación del concepto puesto en estudio. El uso del lenguaje cotidiano en la transposición didáctica suele interferir en la construcción y manejo del concepto, debido a ambigüedades propias del lenguaje diario.
- El manejo del lenguaje aritmético no siempre ayuda a establecer las relaciones con el lenguaje geométrico, quedan solapadas las relaciones con los otros lenguajes. En estas situaciones, la validación de los resultados, utilizando los saberes geométricos, no es tenida en cuenta.

Los alumnos no logran los siguientes objetivos:

- Independizar el concepto de subespacio de su forma de representación.
- Explicitar la correspondencia entre el lenguaje cotidiano y el formal.
- Visualizar el concepto tratado desde los diferentes lenguajes.

Terminología y notación: Se agrupan en esta categoría, los errores que se producen por un uso erróneo de la terminología y de la notación propia del Algebra Lineal. Los conceptos, símbolos y vocabulario utilizados, agrega dificultades a la hora de traducir un concepto al lenguaje matemático.

- La definición de la ley de composición interna y ley de composición externa en los espacios vectoriales utilizando los símbolos clásicos de "**+**" y "**.**" es causa de confusión. Se asume la suma y el producto por un escalar de vectores de V como la suma y el producto por un escalar de vectores en $IR^n$, únicamente.
- La polisemia en los símbolos de suma y producto es la causa de errores a la hora de operativizar el concepto de espacio vectorial y/o de subespacio.
- Se confunde la suma de subespacios con la suma de vectores en $IR^n$. Quedan anclados en los significados ya construidos para esa simbología, los que difieren del significado del objeto matemático en este contexto.
- Es indistinto el uso de las siguientes notaciones: $gen\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $B_V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.
- El sujeto plantea una sinonimia desde su concepción, difiriendo con el significado que le atribuye el álgebra.
- Hay problemas para operativizar las definiciones de subespacio y base, el alumno se queda con las definiciones de la teoría y no puede aplicarlas a un caso concreto. Cuando el alumno no realiza un análisis crítico de diferentes ejemplos donde la técnica es aplicada a una diversidad de problemas, se dificulta la apropiación del objeto matemático.

En referencia a los objetivos; los alumnos no logran:

- Establecer correspondencia entre el significado anterior del término con el significado actual del mismo.

Uso de técnicas: en esta categoría se consideran los errores producidos en el uso de técnicas propias del Algebra Lineal. Entre esas técnicas se observan la caracterización de los elementos de los subespacios suma, intersección y la construcción de sus bases.

- Se aplican las técnicas de demostración a elementos que no pertenecen al subespacio. No hay apoyo en la teoría para validar las operaciones sobre subespacios que producen subespacios.
- No se diferencia entre variables y parámetros. Pueden aplicar la técnica, pero no pueden prever los resultados desde la teoría.
- Falla en la caracterización de los elementos de la intersección de subesapcios cuando concurren diferentes representaciones en la definición de los mismos.
- No pueden imponer las condiciones que determinan cada subespacio para obtener la intersección. El manejo de las condiciones conjuntas y la aplicación del método de igualación introduce errores en el manejo del lenguaje aritmético.
- La definición de intersección se impone a la aplicación de la técnica aritmética en la construcción del subespacio.
- La notación condiciona lo que interpreta (una variable igualada a cero, es interpretada como variable libre, reducen en uno la dimensión del espacio vectorial)

En referencia a los objetivos; los alumnos no logran:

- Establecer la relación entre subespacio y las operaciones que los producen.
- Comprender la utilidad de validar los resultados obtenidos apoyados en la teoría.
- Operativizar las técnicas que permiten construir el subespacio intersección, cuando se tienen distintas representaciones.

Errores de transferencia: en esta categoría se reúnen los errores con origen en otras asignaturas, en los cuales se abordan los conceptos sobre teoría de conjuntos y el uso de las técnicas para demostrar que aporta la lógica.

- Se asume la suma de subespacios como sinónimo de unión, aún sabiendo que uno es un subespacio y el otro no. El sujeto asigna significado propio a símbolos ya definidos, ello obstaculiza la formalización del concepto en lenguaje algebraico.
- Se asumen como sinónimos conjunto y elemento de un conjunto.
- Resignificación del símbolo $\in$ en la definición de subespacios.
- Fallas en la elaboración de la secuencia de la demostración. Se toma el consecuente como el antecedente en la implicación.
- Falta de conocimiento para demostrar el valor de verdad de una proposición. Se asumen demostradas propiedades cuando sólo las verifican para valores particulares.

En referencia a los objetivos; los alumnos no logran:

- Operativizar el uso de las herramientas ya aprendidas, provistas por la lógica.

## 4.2 Comparación con las tipologías seleccionadas.

Hacemos ahora una breve descripción de las tipologías seleccionadas para realizar la comparación. Hemos considerado las siguientes:

Tipología de errores de Brousseau (2001). Para este autor los profesores suelen clasificar al error como un:

- *Error a un nivel práctico*: cuando el profesor considera que son errores de cálculo.
- *Error en la tarea*: cuando el profesor los atribuye al descuido.
- *Error de técnica*: cuando el profesor critica la ejecución de un modo operativo conocido.
- *Error de tecnología*: cuando el profesor critica la elección de la técnica.
- *Error de nivel teórico*: cuando el profesor incrimina los conocimientos teóricos del alumno que sirven de base a la tecnología y a las técnicas asociadas.

Tipos de errores según Socas (1997). Según el autor, los errores en el aprendizaje de las matemáticas se deben a ciertas dificultades que se pueden agrupar en cinco categorías:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
- *Dificultades asociadas a los procesos del pensamiento matemático.*
- *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.*
- *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.*

Tipología de errores según Radatz (1979). El autor realiza una clasificación de los errores partiendo del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales:

- Errores debidos a la dificultad del lenguaje.
- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: esta categoría abarca todas las deficiencias sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática.
- Errores debido a rigidez del pensamiento: relacionados con los obstáculos.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes: referidos a los que surgen por aplicar con éxito una estrategia en áreas de contenidos diferentes.

Cuadro comparativo

| *Errores según* Brousseau | Práctico | Tarea | Técnica | Tecnología | Teoría |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | a, b, e, i, j, q, r | f, k, o, q | a, g, m, n |
| *Dificultades asociadas* Socas | La complejidad de los objetos matemáticos, | los procesos del pensamiento matemático | los procesos de enseñanza desarrollados | procesos de desarrollo cognitivo | actitud afectiva y emocionales matemáticas |
| | a, b, e, f, j, k | b, d, h, i, k, m, o, q, r | b, e | | |
| *Errores debidos a* Radatz | la dificultad del lenguaje | dificultades p/ obtener información espacial | aprendizaje deficiente y conceptos previos | Rigidez de pensamiento | aplicación de reglas o estrategias irrelevantes |
| | a, b, c, d, g, m, k, p | e | j, o, q, r | e, l, f, g, n, | i, r, n |

Del análisis del cuadro comparativo podemos realizar las siguientes observaciones:

- Brousseau no contempla el uso de los diferentes lenguajes y sus significados, con lo cual los errores detectados en este campo no quedan plasmado en la tipología broussoniana.
- Socas considera, dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas, las que no han sido consideradas en este estudio, lo cual se refleja en el cuadro. Además, en esta misma clasificación no tienen cabida. los errores producidos por traducir al lenguaje matemático de manera errónea la terminología del lenguaje diario, los errores de tipo **d**, y el uso inadecuado de la notación. Tampoco podemos encuadrar errores de transferencia, **n**, **o** y **l**.
- Se observa un mejor ensamble entre la tipología de errores dada por Radatz y la tipología aquí presentada; aunque esa no contempla el error **h.**
- A pesar de la coincidencia establecida, creemos que nuestra clasificación es más adecuada para los conceptos del Algebra Lineal mencionados

## 5. Reflexiones finales

Con este estudio exploratorio hemos pretendido indagar cuestiones que subyacen en la naturaleza misma de los sujetos. No pretendemos afirmar que los errores detectados están presentes en todos los estudiantes; más bien queremos observar de qué manera la existencia de algunos de estos errores influye en el aprendizaje del concepto en juego.

Hemos podido establecer que:

- cuando el alumno no logra entender las distintas representaciones de un mismo objeto se genera un problema de aprendizaje, ya que algunos conceptos permanecen como meras definiciones formales, vacías de contenido. No es posible establecer relación con sus conocimientos previos o con argumentos geométricos o físicos, no puede aplicar estos conceptos a la solución de otras situaciones, quedando relegado el concepto a una mera verbalización.
- Es necesario explicitar las relaciones entre las expresiones del lenguaje coloquial con la expresión formal del concepto enunciado, a fin de ayudar a la construcción del saber. El poder expresar en lenguaje coloquial lo que los símbolos expresan y por otro lado, ser capaz de

expresar e interpretar los resultados, escribiéndolos de manera simbólica, es una práctica necesaria para avanzar en el estudio del Algebra y de Matemática toda, la que debe ser favorecida en la práctica docente.

- El análisis precedente nos permite reflexionar acerca del lugar (año-cuatrimestre) que debería ocupar esta asignatura en el plan de estudios, a fin de que el estudiante tenga el desarrollo cognitivo necesario para abordar con mayor probabilidad de éxito el aprendizaje de los conceptos mencionados.

En una próxima etapa se espera utilizar estos resultados para generar una propuesta didáctica que ayude a superar las dificultades encontradas. En el diseño de la propuesta se considerarán secuencias de aprendizaje que articulen el uso de los diferentes lenguajes, como una forma de que los alumnos adquieran una visión de los objetos matemáticos como invariantes de sus múltiples representaciones.

## Agradecimientos

Nuestro agradecimiento a la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Río Cuarto, por los recursos puestos a nuestra disposición para llevar adelante esta investigación. A las Profesoras María José Alonso y Verónica Muñoz, del Dpto de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería, por su colaboración en la traducción del Abstrac.

## Referencias bibliográficas

BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Kluwer Academic Publishers.

DORIER (2002)**,** Teaching Linear Algebra at University, ICM 2003 vol III. pág 875 – 884

HILLEL J. (2000), Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. in J-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp 191–207.

KAPUT (1987), Algebra papers: A representational framework, en N. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (eds.), *Proceedings of the eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 345-354.

LÓPEZ FLORES J., CANTORAL, R. (2005). La socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 19, pp. 838-843.

MIRANDA MONTOYA E. (2004) Generación de modelos de enseñanza – aprendizaje en el álgebra lineal. Primera Fase: Transformaciones Lineales

MOLINA, J L, OKTAÇ A**.** (2007) *Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.

RICO, L. (1995): "Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas", cap. 3. pp. 69-108, en KILPATRIK, J.; GÓMEZ, P. y RICO, L.: Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico.

ROSSO, A. BARROS, J. (2010) Propuesta didáctica de articulación de los diferentes lenguajes subyacentes en la enseñanza de Espacios Vectoriales y Subespacios en Algebra Lineal. PIIMEG. UNRC.

SIERPINSKA, A. (1996). Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra. Artículo presentado en la Research Conference in Collegiate Mathematics Education. USA: Central Michigan University.