SI ENRIQUE VIII TUVO 6 ESPOSAS, ¿CUÁNTAS TUVO ENRIQUE IV? EL REALISMO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y SUS IMPLICACIONES DOCENTES

Claudi Alsina *

SÍNTESIS: El objetivo de este artículo es realizar una reflexión sobre la realidad como referente para nuestra actuación docente, prestando especial atención a las falsas realidades tan presentes aún en nuestra enseñanza e indicando las características deseables del realismo educativo. Gran parte del tiempo dedicado a la enseñanza de la matemática se dedica a la resolución de ejercicios rutinarios alejados de la vida cotidiana. El artículo ejemplifica con ejercicios extraídos de libros de texto la tendencia hacia problemas muy alejados de la realidad y de la vida cotidiana y que por tanto no permiten acercar el interés de los estudiantes hacia la disciplina. Finalmente propone diez problemas ejemplares que permiten mostrar a la matemática como útil para la interpretación y modelización de la realidad, capaz de sorprender y emocionar y necesaria para la toma de decisiones ciudadanas.

SÍNTESE: *O objetivo deste artigo é realizar uma reflexão sobre a realidade como referente para a nossa atuação docente, prestando especial atenção às falsas realidades ainda tão presentes em nosso ensino e indicando as características desejáveis de realismo educativo. Grande parte do tempo dedicado ao ensino da matemática destina-se à resolução de exercícios rotineiros distantes da vida quotidiana. O artigo exemplifica, com exercícios extraídos de livros de texto, a tendência a apresentar problemas muito afastados da realidade e da vida quotidiana e que, portanto, não permitem aproximar o interesse dos estudantes à disciplina. Finalmente propõe dez problemas exemplares que permitem mostrar a matemática como útil para a interpretação e exemplificação da realidade, capaz de surpreender e emocionar, e necessária para a tomada de decisões do indivíduo como cidadão.*

* Licenciado en Ciencias (Matemáticas) por la Universidad de Barcelona en 1974 y doctorado en Ciencias (Matemáticas) por la Universidad de Barcelona en 1978. Es catedrático de la Universidad Politécnica de Cataluña, España.

ABSTRACT: *The goal of this article is to reflect on reality as a point we refer to during our labor as teachers, paying special attention to false realities, which still exist in our teaching practices, and pointing out desirable characteristics for educational realism. Most of the time dedicated to the teaching of mathematics is spent solving repetitive exercises, afar from every day life. This article presents exercises taken from textbooks that exemplify the trend toward problems which are afar from reality and every day life. This kind of problem hinders students from been interested in the discipline. Finally, this article proposes ten model exercises that present mathematics as a tool useful for interpreting and modeling reality, able to surprise and move and necessary at the moment of making decisions from the point of view of a citizen.*

1. ¿EXISTE LA REALIDAD?

Una de las características humanas es la capacidad de complicar cualquier asunto por simple que éste sea. El caso de la «realidad» es un buen ejemplo. Intuitivamente, el concepto de «realidad» debería ser absolutamente trivial para todos nosotros dada nuestra condición de usuarios permanentes. Sin embargo, las mentes más lúcidas nos han puesto de manifiesto que definir la «realidad» es un reto de gran complejidad intelectual.

Ya Heráclito no lo veía claro:

— A la realidad le gusta esconderse.

Y Albert Einstein muchos siglos después seguía buscándola:

— La realidad es una ilusión, pero muy persistente.

Philip K. Dick admitió creencias variables con el tiempo:

— La realidad es aquello que cuando dejas de creer en ello, no desaparece.

Y para Matrix el asunto es aún más complicado:

— La realidad podrían ser señales eléctricas, interpretadas por el cerebro.

Esta última concepción no está alejada del popular dicho:

— Llamamos realidad a todo lo que percibimos… y así nos va.

Algunos, como T. Clanay, contrastan realidad con un antónimo:

— La diferencia entre la ficción y la realidad es que la ficción ha de tener sentido.

Y suerte que aún existan desengañados como Woody Allen que conservan cierta dosis de esperanza:

— Odio la realidad pero sé que aún es el único lugar donde puede encontrarse una buena carne.

Filósofos, cineastas, neurocientíficos, novelistas y un largo catálogo de profesionales pueden permitirse el lujo de jugar con la realidad dado que en este juego es, precisamente, donde hallan oportunidades para su sustento. Pero nosotros, como docentes matemáticos, no podemos renunciar a una definición precisa y operativa de realidad sobre la cual tenga sentido la matematización. En este artículo adoptaremos la definición dada en el reciente *ICMI Study 14* sobre «Aplicaciones y modelización en la enseñanza de las matemáticas»:

— Entendemos por *mundo real* todo lo que tenga que ver con naturaleza, sociedad o cultura, incluyendo tanto lo referente a la vida cotidiana como a los temas escolares y universitarios y disciplinas curriculares diferentes de las matemáticas.

Esta «realidad», de la cual formamos parte, es la que necesitamos considerar para el desarrollo matemático en las aulas. Sin embargo, no siempre la tenemos presente y aparece…

2. EL TIMO DE LAS REALIDADES MATEMÁTICAS

Nos interesa en este apartado desenmascarar con detalle aquellas referencias a «realidades» que pueden confundir substrayendo el interés por su conocimiento. Estas realidades matemáticas abundan en nuestras explicaciones y forman parte prominente de nuestros libros de texto, convirtiendo lo que debería ser una motivación para unas matemáticas activas en un artificio para consagrar unas matemáticas pasivas.

2.1 REALIDADES FALSEADAS Y MANIPULADAS

Son situaciones aparentemente realistas (al contar con palabras y datos de uso cotidiano) pero deformadas o cambiadas para poder dar lugar a ejercicios matemáticos rutinarios. Se trata de una preparación *ad-hoc* justificada por motivos pedagógicos:

Ejemplo: «Edades de hijos».

Un amigo le pregunta a otro:

— ¿Cuántos hijos tienes y de qué edad?

La respuesta:

— Tengo tres hijos. El producto de sus edades es 36 y su suma es el número de esa casa...

— ¿Y qué más? –dice el primero.

— ¡Ah! Es verdad –responde–. La mayor se llama Alicia.

Ejemplo: «Un puente sin dispositivo de dilatación».

Un puente metálico tiene 1 km de longitud. Debido al calor se dilata 20 cm. Si no se hubiese previsto un medio de absorber esta dilatación el puente se levantaría formando un triángulo (en el que la base sería el puente antes de la dilatación) de altura *h.* ¿Cuál será el valor de *h*?

2.2 REALIDADES INUSUALES

Son situaciones de carácter excepcional o muy poco frecuente que aparecen como si fueran cotidianas.

Ejemplo: «El dique». Supongamos que podemos construir un dique en la forma que queramos. ¿Cuál es la mínima cantidad de agua necesaria para hacer flotar el portaaviones *Forestal* que pesa 80.000 toneladas?

Ejemplo: «Cinturón terráqueo». Primero rodeamos la Tierra con un hilo ajustado a su superficie (supuesta lisa, claro está), y después añadimos 6 m más de hilo, con lo que la circunferencia formada será ahora mayor que la de la Tierra y se separará una cierta distancia de su superficie. ¿De cuánto será esta separación?

2.3 REALIDADES CADUCADAS

Se trata de situaciones ya pasadas, en general irrepetibles, que algún día fueron de actualidad pero que el paso del tiempo ha hecho desaparecer. Para los estudiantes del siglo XXI son ya ficciones históricas.

Ejemplo: «La balanza». El dueño de un comercio sólo tiene una balanza de cocina que pesa hasta 10 kg. Si un aprendiz debe pesar un peso superior, ¿cómo hará para complacer a su dueño?

2.4 REALIDADES LEJANAS

Están relacionadas con escenas de culturas alejadas, hechos exóticos, folklóricos y curiosos que en absoluto se identificarán con las realidades locales actuales.

Ejemplo: «Los misioneros y los caníbales». Tres misioneros y tres caníbales han de cruzar un río en una barca en la que sólo caben dos personas. Los tres misioneros saben remar, pero sólo uno de los caníbales sabe hacerlo. Por otra parte, han de efectuar el traslado de forma que en ningún momento los caníbales superen en número a los misioneros, pues en tal caso se los comerían.

¿Cuál es el mínimo número de viajes que habrán de efectuar para cruzar todos al otro lado sin que los caníbales se coman a ningún misionero, ni lleguen siquiera a mordisquearlo?

2.5 REALIDADES OCULTAS

Se trata hechos no observables directamente, sobre los que no hay ni intuición ni experiencia, que dan lugar a ejercicios formales o modelos cuyos resultados no pueden ser contrastados (medios de transporte que no existen, balanza que no puede fabricarse, inventos futuristas, etcétera.

Ejemplo: «El representante de comercio». Un representante de comercio, a la vez lógico y moderno, tiene a todos sus clientes en una misma ruta rectilínea; sus distancias respectivas no sobrepasan los 999,9 km. Nuestro señor Smith ha calculado que para ir de un cliente a otro podría utilizar los siguientes medios:

— Sus piernas (velocidad: 6 km/h) para distancias inferiores a 1 km.

— Su viejo Ford (60 km/h) entre 1 y 9 km.

— Su avión (600 km/h) entre 10 y 90 km.

— Su cohete (6.000 km/h) entre 100 y 900 km.

Tiene como principio el no volver nunca sobre sus pasos. Según sus cálculos, no debe, además, pasar nunca más de nueve minutos con un mismo medio de locomoción. ¿Qué plan debe seguir el señor Smith?

2.6 REALIDADES NO ADECUADAS

Son situaciones no adecuadas a la edad y circunstancias de los estudiantes, o no correctas pues pueden confundirlos u ofenderlos. En general, ni son positivas ni son interesantes.

Ejemplo: «La estadística del misántropo». El 70% de los hombres es feo. El 70% de los hombres es tonto. El 70% de los hombres es malo. ¿Cuál es, como mínimo, el porcentaje de hombres feos, tontos y malos?

2.7 REALIDADES INVENTADAS

Se trata de realidades ficticias, maquilladas como situaciones aparentemente posibles. A menudo incluyen datos o medidas equivocadas, guiando, perversamente, a creencias falsas e induciendo más tarde a errores inadmisibles. También pueden darse situaciones sin referencias a medidas o características físicas presentado un modelo abstracto que no se corresponderá nunca con una realidad del planeta Tierra.

Ejemplo: «Casas en una *donut*». Tres casas situadas en una esfera han de ser conectadas a tres servicios (electricidad, agua y gas) de manera que las cañerías no se corten ¿Es posible en la esfera? ¿Qué ocurriría si las casas estuvieran en un planeta en forma de toro?

Ejemplo: «Revalorizando la moneda». Hoy día, en que tan desprestigiadas están las unidades monetarias (¿qué podemos comprar con una unidad?), viene bien resolver el problema siguiente para devolvernos el optimismo y la confianza en nuestra moneda.

Supongamos que en el comienzo de nuestra era, es decir, con el nacimiento de Jesucristo, la Tierra comienza a viajar –digamos, en línea recta, para mayor claridad– a la velocidad de la luz. Engendrará así un cilindro cuya sección recta será la del círculo máximo de la Tierra, y su altura será la velocidad de la luz multiplicada por el tiempo que esté trasladándose, que consideraremos será hasta el año 2000. Supongamos también que este cilindro es de oro macizo y queremos calcular su valor (un gramo de oro vale actualmente 370 unidades).

Por otra parte, si al mismo tiempo que la Tierra comienza a desplazarse como hemos dicho, colocamos una unidad monetaria en el banco al interés compuesto del 10% y la dejamos hasta el mismo año 2000, el capital que tendremos en el banco al cabo de ese tiempo, ¿nos permitirá comprar el cilindro de oro macizo?

Nuestros estudiantes no merecen todas estas realidades trastocadas, todos estos simpáticos ejemplos absurdos.

3. HACIA EL REALISMO MATEMÁTICO DOCENTE

Tal como dijo Hans Freudenthal:

> ¿Cómo crear contextos adecuados para poder enseñar matematizando? [...] necesitamos problemas matemáticos que tengan un contexto significativo para los estudiantes.

Entenderemos por matematización el proceso de trabajar la realidad a través de ideas y conceptos matemáticos, debiéndose realizar dicho trabajo en dos direcciones opuestas: a partir del contexto deben crearse esquemas, formular y visualizar los problemas, descubrir relaciones y regularidades, hallar semejanzas con otros problemas..., y trabajando entonces matemáticamente hallar soluciones y propuestas que necesariamente deben volverse a proyectar en la realidad para analizar su validez y significado.

Siguiendo las ideas del proyecto PISA *(Programme for Indicators of Student Achievement)* –cuyo comité de expertos en matemática está encabezado por Jan de Lange–, deberíamos prestar especial atención al desarrollo de grandes competencias o habilidades tales como el pensar matemáticamente, saber argumentar, saber representar y comunicar, saber resolver, saber usar técnicas matemáticas e instrumentos... pero también saber modelizar.

Aprender a modelizar es saber estructurar el contexto, matematizar y reinterpretar los resultados de esta matematización, revisar el modelo, modificarlo, etcétera.

Pero no debemos olvidar que el objetivo de enseñar todas estas habilidades debe ser el poder trabajar las grandes ideas tales como: cambio, crecimiento, espacio, forma, azar, dependencia, relaciones, razonamiento cuantitativo, ideas, que habrán de delimitar el tipo de instrumentos matemáticos a poner en juego. Recordemos la celebrada definición de K. Devlin:

> [...] el objetivo de la educación matemática debe ser producir ciudadanos educados y no una pobre imitación de una calculadora de 30 $.

O siguiendo a Jan de Lange:

> El contexto puede ser la vida cotidiana, cultural, científica, artificial, matemático, etc. Los problemas del mundo real serán usados para desarrollar conceptos matemáticos [...] luego habrá ocasión de abstraer, a diferentes niveles, de formalizar y de generalizar [...] y volver a aplicar lo aprendido [...] y reinventar la matemática [...].

Una completa e interesante descripción de la modelización matemática ha sido dada por Henry O. Pollak:

> Cada aplicación de la matemática usa la matemática para evaluar o entender o predecir algo que pertenece al mundo no matemático. Lo que caracteriza a la modelización es la atención explícita al principio del proceso, al ir desde el problema fuera del mundo matemático a su formulación matemática, y una reconciliación explícita entre las matemáticas y la situación del mundo real al final. A través del proceso de modelización se presta atención al mundo externo y al matemático y los resultados han de ser matemáticamente correctos y razonables en el contexto del mundo real.

Este autor también ha descrito muy minuciosamente los ocho pasos que deben darse en la modelización matemática:

1. Identificamos algo en el mundo real que queremos conocer, hacer o entender. El resultado es una cuestión en el mundo real.
2. Seleccionamos «objetos» que parecen importantes en la cuestión del mundo real e identificamos las relaciones entre ellos. El resultado es la identificación de conceptos clave en la situación del mundo real.
3. Decidimos lo que consideraremos o lo que ignoraremos sobre los objetos y su ínter-relación. No se puede tomar todo en cuenta. El resultado es una versión idealizada de la cuestión original.
4. Traducimos la versión idealizada a términos matemáticos y obtenemos una formulación matematizada de la cuestión idealizada. A esto lo llamamos un modelo matemático.
5. Identificamos los apartados de la matemática que pueden ser relevantes para el modelo y consideramos sus posibles contribuciones.
6. Usamos métodos matemáticos e ideas para obtener resultados. Así surgen técnicas, ejemplos interesantes, soluciones, aproximaciones, teoremas, algoritmos, etc.
7. Tomamos todos estos resultados y los trasladamos al principio. Tenemos entonces una teoría sobre la cuestión idealizada.
8. Ahora debemos verificar la realidad. ¿Creemos en el resultado? ¿Son los resultados prácticos, las respuestas razonables, las consecuencias aceptables?
   a) Si la respuesta es sí, hemos tenido éxito. Entonces, el siguiente trabajo que es difícil pero extraordinariamente importante, es comunicar lo encontrado a sus usuarios potenciales.
   b) Si la respuesta es no, volvemos al inicio. ¿Por qué los resultados no son prácticos o las respuestas no razonables o las consecuencias inaceptables? Seguramente el modelo no era correcto. Examinemos lo que pudimos hacer mal y por qué y empecemos de nuevo.

Procede, entonces, preguntarse por los tipos de problemas que pueden ser adecuados para trabajar los procesos de matematización o modelización. Las siguientes tablas reúnen lo que actualmente creemos más negativo para la elección de aplicaciones.

Matematización funcional
Tipos de problemas

- Leyes de la naturaleza.
- Visualización de datos.
- Medidas y escalas.
- Distribuciones estadísticas.
- Cálculos de seguros.
- Índices de inflación y desarrollo.
- Consumo de recursos no renovables.
- Tiempos de producción.
- Máximos y mínimos métricos.
- Cálculos numéricos.
- Ajuste y trazado de curvas.
- Epidemiología.
- Efectos de medicamentos.
- Tasas e impuestos.
- Predicción sismológica.
- Predicción médica.
- Predicción meteorológica.
- Fabricación de CD, DVD...
- Gráficas médicas (crecimiento, ritmo cardiaco).
- Problemas de visión (isoclinas).
- Control acústico.
- Topografía y geomática.
- Procesos discretos.

Matematización discreta
Tipos de problemas

- Crecimiento de personas.
- Crecimiento de poblaciones.
- Crecimiento de capitales.
- Planificación de pensiones.
- Cancelación de hipotecas.
- Análisis meteorológico.
- Análisis económico.
- Análisis de catástrofes.
- Explotación de recursos.
- Epidemiología.
- Elecciones políticas.
- Repartos justos.
- Contabilidad de posibilidades.
- Codificación numérica.
- Organización secuencial de tareas.
- Conexiones telefónicas.
- Rutas óptimas en viajes.
- Distribuciones espaciales.
- Circuitos electrónicos.
- Costes mínimos, optimización.
- Redes de comunicaciones.
- Juegos, simulaciones.
- Posibilidades computacionales.
- Digitalización de imágenes.

Matematización algebraica
Tipos de problemas

- Dependencias lineales entre variables.
- Coordenadas geográficas.
- Coordenadas en objetos.
- Encriptación de mensajes.
- Ampliaciones y reducciones.
- Cambios de escala en gráficas.
- Problemas de consenso.
- Problemas de decisión.
- Cálculo de cargas constructivas.
- Diseño asistido por ordenador.
- Corrección de errores.
- Digitalización de imágenes.
- Geometría computacional.
- Regresión lineal estadística.
- Códigos lineales.
- Producción sectorial.
- Macroeconomía.
- Expresiones recurrentes.
- Formas cónicas.
- Formas cuádricas.
- Frisos y decoraciones.
- Collages gráficos.
- *Inputs / Outputs.*
- Procesos discretos.

Matematización geométrica
Tipos de problemas

- Forma-función en la naturaleza.
- Problemas físico-químicos.
- Construcción de máquinas.
- Movimiento de robots.
- Tratamiento de imágenes.
- Reconocimiento de formas.
- Diseño asistido por computador.
- Imágenes médicas.
- Empaquetamientos óptimos.
- Elaboración de mapas.
- Aplicaciones fotográficas.
- Satélites orbitales.
- Diseño industrial de objetos.
- Diseño en joyería.
- Decoración (frisos, mosaicos, etc.).
- Coordinación modular.
- Construcción arquitectónica.
- Ingeniería civil (estructuras, etc.).
- Pintura y escultura.
- Música y acústica.
- Coreografía (focos, teatro, danza, etc.).
- Patrones y confección.
- Representaciones diversas.
- Creatividad con formas.

Matematización estadística
Tipos de problemas

- Leyes de la naturaleza.
- Muestreo significativo.
- Cálculo de probabilidades.
- Sondeos de opinión.
- Demografía y censos.
- Decisiones.
- Pirámides de edad.
- Simulación de fenómenos.
- Encuestas de precios.
- Índices de precios y consumos.
- Negocio de casinos y loterías.
- Preferencias, audiencias.
- Contabilidad ecológica.
- Tablas de mortalidad.
- Problemas de colas.
- Experimentación con fármacos.
- Repeticiones de fenómenos naturales.
- Dependencias entre parámetros.
- Independencias entre variables.
- Control de la calidad.
- Visualización de la información.
- Transmisión de información.
- Corrección de errores.
- Medidas experimentales.
- Seguros ante riesgos.
- ...

4. DIEZ PROBLEMAS EJEMPLARES

Si antes hemos criticado los problemas correspondientes a realidades evitables, ahora y enlazando con el listado anterior de temas hemos seleccionado diez enunciados del nivel de secundaria que consideramos representan bien lo que estamos presentando:

El problema de la lata de Coca-Cola (Garfunkel)

La lata usual contiene 33 cl siendo su espesor de aluminio de 0,508 mm pero su tapa superior tiene el triple de grueso. Calcule las dimensiones del cilindro que minimiza el coste del aluminio y contraste los resultados con las medidas reales.

Goles de penalti (E. Fernández, J. F. Matos)

Haga una lista de los parámetros que pueden considerarse al tirar un penalti en fútbol y qué relaciones deben darse entre los mismos para marcar un gol.

Localización óptima (Pólya)

Dadas tres poblaciones *A, B* y *C* cuyas distancias son conocidas, ¿cuál es el punto *P* cuya suma de distancias a *A, B* y *C* resulta mínima? Idear diversas estrategias.

Un método de escaños políticos por sucesión de divisores (Ramírez)

Sean V_1 ³ V_2 ³ ... ³ V_n los votos (ordenados de *n* partidos que deben repartirse *e* escaños. Fíjese una sucesión $0 < d_1 < d_2 <\ldots < d_e$ y divídase cada V_i por los *e* números (V_i/d_1, V_i/d_2, ..., V_i/d_e). Forme así una matriz con las *n* filas y *e* columnas de las divisiones y márquense las *e* cantidades mayores en esta matriz. Asígnense tantos escaños a cada partido como números mayores aparecen en cada fila correspondiente.

Son usuales las sucesiones:

Imperiali: 2, 3, 4, 5, 6, ... St-Lagüe II: 1, 4, 3, 5, 7, 9, ...

D'Hondt: 1, 2, 3, 4, 5, ... Danés: 1, 4, 7, 10, 13, ...

St-Lagüe I: 1, 3, 5, 7, 9, ...

Relaciones lineales y cuerpo humano

Se plantea el justificar determinadas relaciones algebraicas relacionadas con las medias o proporciones del cuerpo humano:

- ¿Qué relación hay entre el perímetro de la cabeza y la altura?
- ¿Qué relación hay entre la longitud del zapato y la altura?
- ¿Cuántos pies son un paso?
- ¿Qué relación hay entre la huella de un escalón y su altura?
- ¿Qué relación hay entre la circunferencia de un anillo para el dedo índice y la muñeca?
- ¿Qué relación hay entre palmo y pie?

Elegir un modelo de coche (Alsina)

Los modelos Lancia Dedra 1.8 i.e. y 1.6 i.e. se ofrecen con la siguiente información sobre consumo (1/100 km). El modelo 1.8 gasta 6,7 (a 90 km/h), 8.5 (a 120 km/h) y 10,3 en ciudad. El modelo 1.6 gasta 6,1 (a 90 km/h), 7,9 (a 120 km/h) y 10,9 en ciudad. Una persona que desease minimizar el gasto de gasolina, ¿qué modelo debería elegir? Discutir diferentes alternativas según las proporciones de recorridos, urbanos o de carretera, previsibles.

ISBN

El código ISBN (F. G. Forster, 1969) o International Standard Book Numbers contiene diez dígitos: $d_1\, d_2\, d_3\, d_4\, d_5\, d_6\, d_7\, d_8\, d_9\, C$, nueve informativos y uno de control. Los nueve primeros incluyen uno o dos dígitos indicando idioma o país (0 inglés, 3 alemán, 87 Dinamarca, etc.), dos o cinco dígitos indicando la editorial y el resto la publicación en concreto. El último dígito de control C se calcula de forma que:

$10d_1 + 9d_2 + 8d_3 + ... + 2d_9 + C$ sea múltiplo de 11.

a) Busque C para el ISBN 0-7167-1830-C.

b) Discuta los posibles valores de x, y en el ISBN 0-13-1112xy-3.

c) Discuta posibles errores en el ISBN 0-1111-1211-3 sabiendo que los cinco primeros dígitos son correctos y sólo un dígito está equivocado.

d) ¿Qué ocurre si dos dígitos se intercambian en un ISBN?

Para los arquitectos «la tierra es plana» (Alsina)

Estudiar la diferencia entre la longitud de un trozo de arco terrestre *ab* y su aproximación lineal tangente (siendo el radio de la Tierra R = 6.371.221 m).

Longitudes y latitudes (COMAP)

En el esquema tiene dos puntos $A = (r, s)$, $B = (u, v)$ con longitud y latitud como coordenadas terrestres. Al mirar desde A y B un punto $S = (x, y)$ se miden los ángulos azimutales a y b relativos al Norte. Si A = (–120º24’19’’, 48º37’51’’) y B =(–120º31’59’’, 48º38’03’’), a = 242º y b = 198º calcule (x, y).

Aspirinas contra infartos (Moore)

Durante varios años 21.996 doctores norteamericanos tomaron en días alternos dos pastillas para ver si la aspirina o el beta-caroteno influían favorablemente respecto de los ataques coronarios. Se trataba, pues, de un experimento ciego de dos factores que también tuvo en cuenta el posible efecto placebo: ¿cómo cree que se organizó este experimento?

5. DEL REALISMO TEMÁTICO AL REALISMO EN CLASE

Prestar atención docente a la realidad y a los procesos de modelización no es suficiente. Hay otro sentido del realismo al cual prestar atención. Es el realismo de la sensibilidad entre los estudiantes, el entorno social y nuestras propias posibilidades. De nada sirve la innovación docente y curricular si ésta no va unida a una actitud generosa y esperanzadora por formar buenas personas. Es el realismo de saber unir a nuestro discurso nuestra activa predisposición emocional a animar, motivar, interesar, dialogar, etcétera. Si descuidamos este valor agregado que podemos aportar a la formación, nuestra labor será substituible por perfectas presentaciones multimedia.

Muchas gracias por su implicación personal en su apuesta por el futuro de las personas.

BIBLIOGRAFÍA

ALSINA, C. (1995): *Una matemática feliz y otras conferencias.* Buenos Aires: OMA.

— (1998): *Contar bien para vivir mejor.* Barcelona: Rubes.

— (1998): *Neither a Microscope nor a Telescope, Just a Mathscope. Proceed.* International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications – ICTMA 8.

— (2000): *La matemática hermosa se enseña con el corazón.* Buenos Aires: OMA.

ALSINA, C. y FORTUNY, J. M. (1993): *La matemática del consumidor.* Barcelona: Instituto Catalán del Consumo, Generalitat de Catalunya.

ALSINA, C. y OTROS (1996): *Enseñar matemáticas.* Barcelona: Graó.

BLUM, W. y NISS, M. (1991): «Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, Applications and Links to Other Subjects-State, Trends and Issues in Mathematics Instruction», en W. Blum, M. Niss e I. Huntley (eds.): *Modeling, Applications and Applied Problem Solving-Teaching Mathematics in a Real Context.* Chichester: Ellis Horwood, 1989, pp. 1-21.

DAVIS, P. J. y HERSH, R. (1981): *The Mathematical Experience.* Boston: Birkhauser.

LANGE, J. de (1987): *Mathematics, Insight and Meaning.* Utrecht: OW & OC.

— (1996): «Real Problems with Real World Mathematics», en *Proceedings of the 8.th International Congress on Mathematical Education* (ICME-8), 14-21 de julio. Sevilla, pp. 83-109.

LANGE, J. de y OTROS (eds.) (1993): *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications.* Chichester: Ellis Horwood Ltd.

DEVLIN, K. (1997): «Why we Should Reduce Skills Teaching in the Math Class», en *The Mathematical Association of America (MAA) Newsletter Focus.*

FREUDENTHAL, H. (1983): «Major Problems in Mathematics Education», en M. Zweng y otros (eds.): *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education.* Boston: Birkhauser.

— (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

GARFUNKEL, S. (ed.) (1997): *Principles and Practice of Mathematics.* Nueva York: COMAP, Springer-Verlag.

GARFUNKEL, S. y OTROS (1989): *For All Practical Purposes: An Introduction to Contemporary Mathematics.* Lexington: the Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP). (1999) Versión española: *Las matemáticas en la vida cotidiana.* Madrid: Addison-Wesley-Universidad Autónoma de Madrid (UAM).

— (1998-2000): *Mathematics: Modeling Our World (MMOW).* (Arise Project). Lexington: COMAP.

MALKEVITCH, J. (1984): *The Mathematical Theory of Elections.* Arlington, MA: COMAP.

MOORE, D. S. (1995): *The Basic Practice of Statistics.* Nueva York: W. H. Freeman.

NISS, M. (1989): «Aims and Scope of Applications and Modeling in Mathematics Curricula», en W. Blum y otros (eds.): *Applications and Modeling in Learning and Teaching Mathematics,* pp. 22-31. Chichester: Ellis Horwood.

— (1992): «Applications and Modeling in School Mathematics - Directions for Future Developments», en *Developments in School Mathematics Around the World,* vol. 3. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), pp.196-200.

PAULOS, J. A. (1996): *El hombre anumérico.* Barcelona: Tusquets.

— (1997): *Un matemático lee el periódico.* Barcelona: Tusquets.

POLLAK, Henry O. (1997): «Solving Problems in the Real World», en L. Steen (ed.): *Why Numbers Count: Quantitative Literacy for Tomorrow's America.* Nueva York: The College Board.

RAMÍREZ, V. (1986): «Matemática aplicada a la distribución de escaños. Método de reparto P.R.I.», en *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»,* n.º 6-7, pp. 17-32.

RAMÍREZ, V. y RAE, D. (1993): *El sistema electoral español.* Madrid: McGraw Hill.

ROMBERG, T. A. y DE LANGE J. (eds.) (1997): *Mathematics in Context.* Chicago, EBEC.

STEEN, L. A. (1994): *For All Practical Purposes: An Introduction to Contemporary Mathematics.* Lexington: COMAP, W. H. Freeman Co. Nueva York. (1999) Versión española: *Las matemáticas en la vida cotidiana.* Madrid: Addison-Wesley-Universidad Autónoma de Madrid (UAM).