ALGUNAS IMPLICACIONES DE LA FILOSOFÍA MARXISTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA: EL CASO DE CUBA

Celia Rizo Cabrera y Luis Campistrous Pérez *

SÍNTESIS: En este material se abordan algunas consideraciones teóricas acerca de la matemática como ciencia y su estructuración como asignatura, y se toma como ejemplo el caso de Cuba. Aunque en algunos momentos se hablará de la ciencia en general, solo será para darle un mayor nivel de generalidad a los planteamientos, pues se parte de considerar a la matemática como un caso particular de ciencia a la cual son aplicables posiciones teóricas más generales, especialmente cuando se trata de posiciones filosóficas –que es el objetivo– y, muy en especial, las del materialismo dialéctico. Los aspectos que se tienen en cuenta son la vinculación de los conceptos con la práctica, la dialéctica y la formación de conceptos matemáticos y la teoría del conocimiento y su papel en la enseñanza de la matemática. Finalmente, se explicitará cada uno de los aspectos anteriores y se presentará algún ejemplo que esclarezca las posiciones asumidas.

Palabras clave: posiciones filosóficas; formación de conceptos matemáticos.

ALGUMAS IMPLICAÇÕES DA FILOSOFIA MARXISTA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA: O CASO DE CUBA

SÍNTESE: Neste trabalho, abordam-se algumas considerações teóricas sobre a Matemática como ciência e sua estruturação como disciplina, e toma-se como exemplo o caso de Cuba. Se em algum momento se fala da ciência em geral, será simplesmente para lhe dar um maior nível de generalidade às propostas, pois parte-se da premissa de que a Matemática é um caso particular de ciência à qual são aplicáveis posições teóricas mais gerais, especialmente quando se trata de posições filosóficas – que é o objetivo-, especialmente, as do materialismo dialético. Os aspectos que se têm em conta são a vinculação dos conceitos com a prática, a dialética e a formação de conceitos matemáticos e a teoria do conheci-

* Ambos autores fueron durante años investigadores del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de la República de Cuba y actualmente lo son del Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (México).

Artículo recibido: 11/04/10; evaluado: 13/08/10 - 28/01/11; aceptado: 29/01/11

mento e seu papel no ensino da Matemática. Finalmente, se explicitarão cada um dos aspectos anteriores e se apresentará algum exemplo que esclareça as posições assumidas.

Palavras-chave: *posições filosóficas; formação de conceitos matemáticos*

SOME IMPLICATIONS OF MARXIST PHILOSOPHY FOR TEACHING MATHMATICS: THE CASE OF CUBA

ABSTRACT: *In this material we are going to treat some of the theoretical considerations about mathematics as a science and it's structure as a subject, and we take as an example the case of Cuba. Although in some moments we will be talking about science in general, it will only be to give a higher level of generality to the approaches, for it considers mathematics as a particular case of science to which they apply theoretical positions more generally, especially when it comes to philosophical positions- which is the objective- and, in particular, those of the dialectical materialism. The aspects that are taken into account are the linking of concepts with practice, the dialectic and the formation of mathematical concepts and the theory of knowledge and its role in the teaching of mathematics. Finally, each of the above issues will be explained and some examples will be used to shed light on the positions taken.*

Keywords: *philosophical positions; formation of mathematical concepts.*

1. INTRODUCCIÓN

La concepción de la matemática como ciencia y como asignatura a impartir está sujeta a diferentes puntos de vista sustentados en las posiciones filosóficas que sobre la ciencia y su surgimiento se tengan, y aquellos que se asuman son importantes porque permiten algunas consideraciones acerca de la matemática como disciplina científica y de su estructuración como asignatura.

En el trabajo que se presenta a continuación se hablará, en algunos momentos, de la ciencia en general solo para darle un mayor nivel de generalidad a los planteamientos. Se parte de considerar a la matemática como un caso particular de ciencia a la cual son aplicables posiciones teóricas más generales, especialmente cuando se trata de posiciones filosóficas –que es el objetivo– y, muy en especial, las del materialismo dialéctico. Los aspectos que se tendrán en cuenta son:

- La vinculación de los conceptos con la práctica.
- La dialéctica y la formación de conceptos matemáticos.

- La teoría del conocimiento y su papel en la enseñanza de la matemática.

A continuación se explicitará cada uno de estos aspectos y se utilizarán ejemplos que esclarezcan las posiciones asumidas.

2. SOBRE LA VINCULACIÓN DE LOS CONCEPTOS CON LA PRÁCTICA

Uno de los problemas más discutidos acerca de las ciencias, incluida la filosofía, es su vinculación con la práctica. Incluso se ha tratado de demostrar por algunos filósofos que la ciencia no se encuentra ligada en modo alguno ni a la concepción del mundo ni a la práctica.

I. Andréiev (1984) plantea al respecto que los neopositivistas menosprecian o ignoran el papel que la filosofía desempeña en la investigación de los problemas de dichas ciencias, y afirman que solo los métodos de las ciencias particulares permiten dar solución a todos los problemas cognoscitivos, tanto de carácter científico como filosófico, y que cada ciencia concreta es filosofía por sí sola. Además, menosprecian la función que ejerce en el conocimiento el pensar teórico científico, sin el que resulta imposible cualquier conocimiento auténtico y, menos aún, moderno.

Sobre estas posiciones, previamente asumidas por los positivistas, V. Lenin (1986) dice claramente que el peligro y la falsedad del positivismo consisten, ante todo, en que sus representantes pretenden separar las ciencias del materialismo y contraponer la filosofía materialista a las teorías de las ciencias concretas.

Estos problemas filosóficos de carácter general, ya existentes en el siglo XIX, persisten y afectan en particular a la matemática. Engels (1961) advirtió sobre este problema cuando planteó que el misterio que todavía rodea a las magnitudes que se manejan en el cálculo infinitesimal constituye la mejor prueba de que aún se cree que en este terreno se está ante puras creaciones e imaginaciones libres del espíritu humano, para las que no se encuentra equivalencia alguna en el mundo objetivo. Es decir, Engels ponía de manifiesto uno de los problemas más serios en cuanto a la concepción de las ciencias, y muy en particular de la matemática, denominado por algunos desvinculación de la práctica de los conceptos matemáticos, sobre todo de los de más reciente desarrollo, como a los que él se refería con respecto al cálculo infinitesimal, para los cuales afirmaba que, exactamente al contrario, todas esas magnitudes tienen su modelo en la naturaleza.

En este sentido, Engels (1975, p. 52) se refirió a cuál era el objeto de la matemática y su vinculación con la realidad objetiva cuando afirmó que:

> La matemática pura tiene por objeto las formas espaciales y las relaciones cuantitativas del mundo objetivo, o sea una materia muy real. El hecho de que esta materia aparezca de una forma sumamente abstracta solo puede ocultar superficialmente su procedencia del mundo exterior. Para poder examinar estas formas y relaciones en su pureza hay que separarlas completamente de su contenido y poner éste aparte, sin tomarlo en consideración. Así se obtiene el punto sin dimensiones, la recta sin espesor ni ancho.

En este mismo título el autor reafirmó que la matemática, como el resto de las ciencias, surgió de las necesidades prácticas de los hombres tales como medir y contar, entre otras.

No obstante, existen todavía diferentes posiciones con respecto a la matemática como ciencia que se reflejan, como es natural, en su tratamiento como asignatura. En la concepción de la enseñanza de la matemática en Cuba, al menos de la educación general (primaria, secundaria y preuniversitaria) de la cual somos partícipes, se ha utilizado como principio fundamental que la matemática no ha sido en ningún momento producto del pensamiento libre del hombre, y que en cada etapa del desarrollo de la humanidad ha tenido una razón de ser, motivada en gran medida por las exigencias de la etapa en cuestión, dejando claro, en relación con las posibilidades de comprensión de los alumnos según su edad, su condicionamiento a las razones prácticas que le dieron origen en un momento histórico concreto. Esta es una de las vías utilizadas para lograr que lo que aprenden tenga significado para los alumnos, e ilustra lo planteado el caso de la introducción de los números complejos en el grado duodécimo.

Como es sabido, las noticias más antiguas sobre la aparición de raíces cuadradas de números negativos datan del siglo I a. C. y son las que figuran, por ejemplo, en los trabajos del matemático griego Herón de Alejandría como resultado de una imposible sección de una pirámide. Los números complejos se visibilizaron en el siglo XVI cuando matemáticos como Tartaglia y Cardano obtuvieron las fórmulas para extraer las raíces exactas de los polinomios de segundo y tercer grado. Si bien la preocupación estribaba en la obtención de las raíces reales de estas ecuaciones, tenían que resolver primero el problema de las raíces de números negativos.

> Las primeras referencias que se tienen sobre la aparición de raíces cuadradas de números negativos provienen del trabajo de los matemáticos griegos, como Herón de Alejandría en el siglo I a. C., como resultado de una imposible sección de una pirámide. Los complejos se hicieron más patentes en el siglo XVI, cuando las fórmulas que dieran las raíces exactas de los polinomios de grados 2 y 3 fueron encontradas por matemáticos italianos como Tartaglia, Cardano. Aunque solo estaban interesados en las raíces reales de este tipo de ecuaciones, se encontraban con la necesidad de lidiar con raíces de números negativos.

Esta necesidad que da origen al surgimiento de los números complejos ha sido utilizada también en el plano didáctico, por lo cual se acostumbra a introducir estos números por la imposibilidad de obtener las raíces cuadradas de los números negativos. No obstante, no existen problemas de índole práctica que, a partir de esa insuficiencia, lleven a la creación estos nuevos números porque, por lo general, los problemas prácticos no conducen a una ecuación cuadrática sin soluciones en el campo de los números reales (R). Por ello, a pesar de su elegancia matemática y aparente sencillez, esta vía posee una desventaja esencial al imprimir en los alumnos la idea de que la razón de la ampliación del campo numérico reside en el interior de la matemática sin relación con la vida práctica.

Para contribuir a formar una concepción científica del mundo y sostener la convicción de que la matemática tiene su origen en la realidad objetiva, su introducción en el grado duodécimo de la escuela cubana se realiza con la estrategia de retomar el origen histórico, de modo que se refuerza la unidad de lo lógico y lo histórico, la dialéctica se revela igual en el razonamiento que en la historia (CAMPISTROUS y OTROS, 1991, p. 70). En efecto, dicha introducción en la escuela cubana parte de un problema: ¿Cuál es la arista de un cubo cuyo volumen es igual a su perímetro disminuido en $10\sqrt{2}$? (CAMPISTROUS y OTROS, 1991, p. 45). Los números se han escogido de forma tal que el problema se pueda resolver sin hacer uso de la fórmula de resolución de la ecuación de tercer grado, aunque se sigue un procedimiento que puede conducir a la fórmula.

Este procedimiento conduce a un sistema de ecuaciones cuyas soluciones no son reales, entonces se les hace ver que el problema tiene una solución real pero que para obtenerla se hace necesario utilizar raíces que no se pueden extraer en (R) y esto justifica la necesidad de ampliar el dominio numérico, en consonancia con el desarrollo histórico del concepto de número complejo.

Asimismo, el reforzamiento de la concepción se logra al plantear la solución del problema por una vía intuitiva y natural que se corresponde con la seguida por los pioneros: «añadir un elemento para la raíz de -1 y operar con las reglas de cálculo ya conocidas». De esta forma se ponen de manifiesto las leyes de la lógica dialéctica[1]:

- Ley de la unidad y lucha de contrarios: en el problema planteado se revela la contradicción entre los números reales y las necesidades de la práctica. Ambos aspectos se presentan unidos en contradicción sin que pueda pensarse uno sin el otro.
- Ley de la transformación de los cambios cuantitativos en cualitativos: en efecto, la experiencia acumulada en la resolución de ecuaciones cúbicas conduce inevitablemente a la elaboración de un procedimiento general que requiere (como ocurre en la obra de Bombelli [ver Boyer, 1986, p. 368]) un cambio en la cualidad de los dominios numéricos, la introducción de números que permiten la extracción de raíz cuadrada a números negativos.
- Ley de la negación de la negación: esto significa que los nuevos números «niegan» a los números reales en tanto existen números cuyo cuadrado es negativo, pero esta negación no es absoluta sino dialéctica pues en el nuevo concepto se incorporan todas las propiedades útiles del concepto «viejo», en particular las leyes formales del cálculo.

Estos puntos de vista se han tenido en cuenta en los programas, en la introducción de los diferentes dominios numéricos, en la concepción de la geometría y en la de los conceptos básicos del cálculo

[1] Hablamos de la lógica dialéctica y no de la dialéctica del mundo material, porque los cambios a que hacemos referencia tienen lugar en el pensamiento como reflejo de la realidad objetiva y no en la realidad misma.

infinitesimal, tales como los de límite, continuidad, derivada e integral; estos últimos, en el nivel preuniversitario.

Sobre la concepción de la geometría en la escuela general básica, que constituyó la tesis doctoral de la coautora de este trabajo, se asumió que, tal como afirmó Engels (1975, p. 52), la geometría es el modelo matemático de las formas espaciales de los objetos y las relaciones cuantitativas entre ellos y, por ende, es el modelo del espacio físico en que el hombre desarrolla su vida. Por esa razón, el centro de atención de la geometría debe ser el estudio de las propiedades que determinan la forma y las magnitudes de los objetos de ese espacio físico, y su posición con respecto a otros de ese propio espacio, sin restarle atención a la abstracción que se requiere para su tratamiento desde el punto de vista matemático.

Desde las posiciones del marxismo se puede comprender la importancia que tiene esta parte de la matemática para que el hombre acceda a la más completa comprensión de los objetos que le rodean, aprenda a reconocerlos, abstraiga sus formas y sus propiedades, en fin, para que al hacerle cognoscible el mundo pueda transformarlo conscientemente. Lo planteado es muy importante para que el aprendizaje sea realmente significativo, lo cual tiene implicaciones también en el plano didáctico.

Esta posición que se asumió con respecto al tratamiento de la geometría en la escuela se contrapone a otras tendencias que surgieron con mucha fuerza en el mundo, sobre todo entre las décadas de 1960 y 1980 del siglo pasado (Guzmán, 1993). Las mismas lucharon denodadamente por «algebrizar a la geometría» y construirla sobre la base de conceptos tales como números reales, vectores, entre otros, separándola *prematuramente* de la realidad objetiva, e incluso se planteó la posibilidad de concebirla y estudiarla sin necesidad de las figuras, es decir, una «geometría sin figuras». Hemos destacado la palabra «prematuramente» porque no se puede negar la importancia que ha tenido en el desarrollo de la matemática, y en particular de la geometría, el proceso de los métodos algebraicos y vectoriales, los cuales también se han incluido en la concepción de la geometría en Cuba, pero en el preuniversitario, privilegiando el tratamiento sintético de la geometría desde el primer grado de la escuela primaria hasta finalizar la secundaria. De este modo se preserva el carácter más concreto de la geometría en los primeros contactos de los alumnos con su estudio, sin negar, en la etapa de profundización, el abordaje de otras formas cualitativamente superiores, pero siempre dejando ver cómo estas nuevas etapas incluyen a las anteriores, como una manifestación de la dialéctica en la enseñanza de la matemática, a lo cual dedicaremos algunas líneas a continuación.

3. LA DIALÉCTICA Y LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

En relación con la dialéctica, Engels (1961, p. 229) planteó que se la concibe

> [...] como la ciencia de las leyes más generales de todo movimiento. Esto significa que sus leyes deben regir tanto para el movimiento en la naturaleza y en la historia humana como para el que se da en el campo del pensamiento.

En el caso de la matemática, la aplicación hay que verla básicamente en el plano histórico lógico, pues esta disciplina trabaja esencialmente con abstracciones, es decir, con reflejos en la conciencia del hombre de la realidad objetiva y no con sus objetos directos. Lo anterior no significa que en las primeras etapas de su enseñanza no se intente concretar esas abstracciones para lograr una mejor comprensión inicial, y aunque esas etapas específicas se van superando, en la escuela las mismas no se desvinculan del origen práctico de los conceptos ni de las relaciones que se estudian.

Un ejemplo es la estructuración para el tratamiento del contenido de numeración hasta 100 en la escuela cubana. En este tratamiento se tienen en cuenta las primeras experiencias de los niños con respecto al uso de sus manos en los procesos de contar y de pensamiento, especialmente de transferencia de lo conocido a lo nuevo, de manera que abarquen, cada vez, las experiencias en el aprendizaje de la numeración decimal. El sistema consiste en:

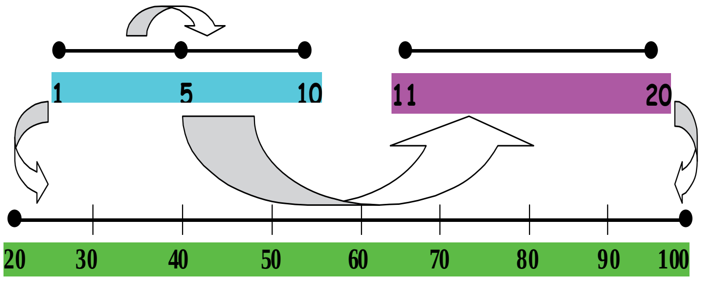
Tratar primero los números hasta 20 con este orden:

- Los números del 1 al 5.
- Los números del 6 al 10.
- Los números del 11 al 20.

Después del trabajo en este intervalo, y aprovechando la tarea aquí realizada, se transfieren estos conocimientos a los números hasta 100 con una lógica que les facilita realizar esa transferencia:

- Obtener primero los múltiplos de 10 a partir del 30 hasta el 100 (son los múltiplos de 10 que faltan por introducir) como 3 grupos de a 10; 4 grupos de a 10; 5 grupos de a 10;..., 10 grupos de a 10, respectivamente.
- Completar los números en cada intervalo (20-30, 30-40, 40-50,..,90-100) por analogía con lo hecho del 1 al 10 y del 11 al 20.

En forma gráfica esta estructuración se representa del siguiente modo:



En cada intervalo se van realizando las operaciones de adición y sustracción, comenzando con la suma y resta de 1 a 5 (esta última se presenta también como suma, reduciéndose el problema a uno conocido: 5 – 2 = 3 porque 2 + 3 = 5). Después se extiende hasta 9 y se introduce el 0 como la diferencia de dos números iguales (2-2, 3-3, y así sucesivamente), aunque previamente se le da significado práctico mediante conjuntos que no tienen elementos y en situaciones de la práctica donde se pone de manifiesto este hecho. Después que se tienen los números y las operaciones de adición y sustracción hasta 10, se extiende hasta 20 transfiriendo las ideas esenciales y lo ya obtenido en el intervalo de 0 a 10.

Como se puede apreciar, hay un trasfondo didáctico para facilitar la comprensión en edades tempranas, lo cual es superado en grados posteriores sin perder este enfoque educativo. Por otra parte, se inicia el tratamiento con necesidades que los pequeños manifiestan y es la necesidad de contar: ¡la práctica y las necesidades que ella conlleva como motor impulsor del desarrollo!

En esta construcción en el primer grado de la escuela primaria, y en las que le siguen en los grados posteriores hasta el cuarto, ya se pueden percibir las leyes de la dialéctica del marxismo:

- Del 0-10, 11-20, 20-30,......100 en el primer grado se dan cambios cuantitativos hasta que se producen un salto de calidad y procesos de transferencia de información, con lo cual completan el dominio de los números hasta 100 y la adición y la sustracción en este intervalo de números.
- En el segundo grado se continúa con los números hasta 100, completando las cuatro operaciones fundamentales de cálculo en ese intervalo, lo que se transfiere a números hasta 1.000 en el tercer grado y a números cualesquiera a partir del cuarto grado.

En este proceso antes descrito en el que cada etapa nueva supera la anterior, se pone de manifiesto la ley de la doble negación. En ellas es notorio que se van desarrollando procesos de pensamiento muy importantes en los niños, especialmente de transferencia de lo conocido a lo nuevo, pero de manera que incluyan y amplíen las experiencias anteriores en el dominio de los números naturales. Cabe destacar que cuando se introducen las fracciones en quinto grado, de nuevo la adición y sustracción de fracciones se reduce al cálculo con naturales al transformarlas en ese proceso en fracciones de igual denominador.

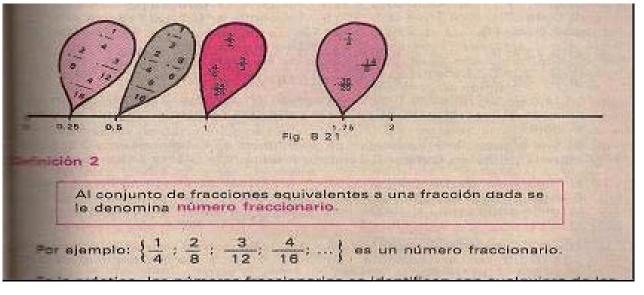
Otro ejemplo es la construcción de los números fraccionarios que da inicio en el quinto grado y concluye en el sexto de la escuela primaria cubana. La vía utilizada en este caso también parte de problemas de la práctica que ilustren la necesidad de tener otros números, además de los naturales, pero para ello se sigue una vía didáctica con una fundamentación matemática muy clara:

- Se introducen las fracciones como partes de un todo, significado que está muy relacionado con la necesidad práctica de dividir en partes iguales cantidades enteras (lo que se le denomina *el todo*).
- Aparece la situación de que hay fracciones diferentes que representan la misma parte de un todo. Eso es un inconve-

niente para el significado del concepto y para su uso porque, aunque nos posibilita operar con fracciones que no sean de igual denominador, también constituye un problema muy importante para la práctica, porque si uno quiere dividir algo en partes iguales no siempre lo puede hacer directamente: es más fácil dividir a la mitad un pastel, después en la mitad de las mitades (en cuartos) y así sucesivamente, hasta llegar a la cantidad de partes iguales que aproximadamente satisfaga el número de posibles comensales. Al final se tendrán n veces 1/n partes iguales.

- Se introduce el concepto de fracciones equivalentes para aquellas que se obtienen unas de otras por ampliación o simplificación.
- Se denomina «número fraccionario» al conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada. Matemáticamente hablando, este paso significa introducir en el conjunto de las fracciones la relación de «ser equivalentes» para el caso en que sus productos cruzados sean iguales. Se tiene así el concepto de «números fraccionarios» que es asignado al conjunto de las «clases de equivalencia» de las fracciones que son equivalentes entre sí (sus productos cruzados son iguales).

Esta idea de clase se materializa en el gráfico siguiente, que aparece en la página 55 del libro *Matemática sexto grado* (1990) de la escuela cubana, y que en la actualidad sigue vigente.



Observen que sobre un «rayo numérico» se han representado fracciones equivalentes a 0,25 (1/4), a 0,5 (1/2), y así sucesivamente, que se agrupan en una especie de globo que representa la clase de equivalencia respectiva.

A cada una de estas clases de equivalencia se hace corresponder un mismo punto del rayo numérico. En este grado de la escuela cubana ya se introducen las definiciones y la de este concepto es la segunda definición número de este capítulo de geometría. Como se aprecia, se representa un número fraccionario en forma conjunta para hacer visible que el número en cuestión no es más que «el conjunto de las fracciones equivalentes a $\frac{1}{4}$: $(\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \ldots)$».

En relación con lo anterior, el papel y lugar de la abstracción en el conocimiento de la naturaleza fue dado por Lenin (1986) cuando indicó la vía del conocimiento de la siguiente forma: «De la percepción viva al pensamiento abstracto y de este a la práctica, tal es el camino dialéctico del conocimiento de la verdad, del conocimiento de la realidad objetiva». Los dos ejemplos antes presentados son una muestra del cumplimiento de este «camino dialéctico del conocimiento: de la práctica al pensamiento abstracto y de ahí de regreso a la práctica como criterio de verdad».

El conocimiento es, dentro de la concepción leninista, la forma en que el hombre refleja la naturaleza, pero, como se comprenderá, no es este un proceso simple, y mucho menos inmediato, sino que es un proceso que involucra toda una serie de abstracciones en la formación de conceptos, relaciones y procedimientos, entre otras, relacionadas mediante determinadas leyes universales de la naturaleza en constante movimiento y desarrollo.

Sin embargo, tal como planteó el propio Lenin (1986), todas estas leyes universales tienen un carácter aproximado ya que el hombre no puede abarcar, reflejar y expresar totalmente la realidad, sino solo aproximarse a ella a través de la abstracción, lo cual indica que la referida abstracción es un eslabón necesario y muy importante dentro del proceso del conocimiento, que permite reflejar la naturaleza que nos rodea en una constante aproximación, pero que, en un final, la veracidad con que haya sido logrado este reflejo la confirma únicamente la práctica como criterio de verdad.

Un ejemplo importante de cómo se ha dado este proceso histórico lógico, y dialéctico, en la formación de conceptos matemáticos lo tenemos en el de integral, que es uno de los conceptos básicos del cálculo infinitesimal –surgido en la segunda mitad del siglo XVII– y sobre los cuales Engels (1961, p. 229) afirma que «de todos los progresos teóricos que se conocen tal vez ninguno represente un triunfo tan alto del espíritu humano».

Con respecto al concepto de integral (más específicamente el de integral definida), el proceso que culminó en su primera conceptualización propiamente rigurosa en el siglo XVII es un modelo de cómo se manifiestan las diferentes leyes de la dialéctica en la obtención de conocimientos en general, y muy en particular en la matemática. Por otra parte, este ejemplo revela claramente cómo los conceptos matemáticos, por muy abstractos que sean, como el caso de la integral, tienen sus orígenes en las necesidades de la práctica y se apoyan en la realidad objetiva, aunque en el proceso de su formación recorren el referido camino dialéctico del conocimiento revelado por Lenin.

Sin pretender elaborar un tratado de historia de la matemática, es necesario hacer algún uso de ella para poder entender bien lo que se pretende ilustrar con el ejemplo del concepto de integral definida, cuyos antecedentes están en la geometría, especialmente en el cálculo de áreas y volúmenes de figuras elementales. No hay datos exactos de cuándo se obtuvieron estos conocimientos, pero se consideran estadios primitivos de su formación, en particular en el caso de la geometría, los existentes en los documentos que se conservan de la cultura matemática de los antiguos egipcios, babilonios, chinos e hindúes, particularmente los papiros y las tablillas cuneiformes, entre otros. Ya entonces, dos mil años antes de nuestra era, hay evidencia de conocimientos muy elementales de la geometría, que se supone surgieron por las necesidades que se le presentaron al hombre en sus labores relacionadas con la agricultura, pero que evidentemente también fueron necesarios para las construcciones que el hombre realizó desde épocas milenarias. En este sentido, se considera que los conocimientos geométricos de los babilonios superaban a los de los egipcios porque sus tablillas contenían cálculos de áreas y volúmenes de figuras rectilíneas, comunes para la geometría elemental, e incluso llegaban a calcular el área del círculo utilizando una expresión de donde se obtiene una aproximación de $\pi = 3$ que, aunque muy poco exacta, les servía para obtener dicho valor. También poseían métodos de cálculo aproximado de volúmenes basados en la medición original de sus dimensiones, entre los que se destaca el del cálculo del volumen de una pirámide truncada no regular.

Los babilonios mostraron un notable análisis abstracto de los problemas prácticos al combinar los cálculos en la determinación de las áreas de los terrenos. Así, por ejemplo, hay evidencia de cálculos de rendimiento de las fincas como función de la calidad de los suelos; en los cálculos de diques con diámetros en forma de trapecio se cuestiona la inclinación del talud, la amplitud de la corona, cálculos de vallados circulares, bases de templos, pozos y continuamente la construcción de canales.

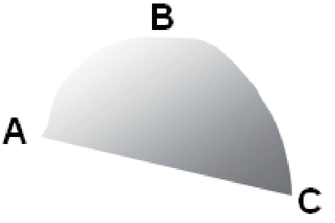
No obstante, los procedimientos eran muy intuitivos, poco rigurosos, y se obtenían con métodos aún muy rudimentarios. Por ejemplo, en el caso que nos ocupa ya se sabía cómo calcular las áreas de cuadrados, rectángulos, triángulos, trapecios, entre otras figuras y cuerpos elementales, pero se requería, en cada caso, utilizar un procedimiento particular. Es interesante ver también cómo desde la etapa de los griegos (a partir del siglo VI antes de nuestra era) se había sistematizado la descomposición de las figuras elementales en otras también elementales; por ejemplo, la descomposición de las áreas del cuadrado, del triángulo y del trapecio, en términos de áreas de rectángulos, lo cual posteriormente se constituyó en una idea importante para la formación del concepto de integral. ¡Esta es la idea que se sigue en el undécimo grado de la escuela cubana para la introducción del concepto de integral definida!

Hasta aquí se puede apreciar el origen práctico de los conceptos matemáticos, así como la manifestación de las contradicciones entre las necesidades de la práctica, en este caso el cálculo de las áreas de terrenos y de objetos de diversas formas, y los conocimientos que el hombre tenía en las primeras etapas del desarrollo de la humanidad. Se ve así cómo el desenvolvimiento del conocimiento humano parte de necesidades de la práctica y como resultado de esa necesidad, que se revela en la interacción de aspectos contrarios contenidos internamente en los objetos y fenómenos del mundo material. Esta necesidad permite, también, comprender que un motor importante del desarrollo de los conocimientos en general, y en particular de los geométricos, estuvo dado en la práctica y en la existencia misma de la materia, y no en alguna causa sobrenatural (dioses, idea, espíritu absoluto, entre otros). Es importante destacar que este conjunto de necesidades que el hombre, digamos primitivo, ha debido enfrentar y buscarle soluciones a lo largo de toda su existencia es uno de los orígenes del desarrollo del mundo material, incluyendo dentro de ese propio mundo al propio hombre. En este desarrollo, lo esencial ha sido el pensamiento humano que se produce, a su vez, en su relación con otros elementos del mundo material y espiritual.

Como se puede apreciar, nos estamos refiriendo a una de las más importantes leyes de la dialéctica, la unidad y lucha de contrarios, en la cual la esencia de la contradicción dialéctica es la relación y concatenación de los contrarios en las que estos se afirman y niegan mutuamente y la lucha de ellos, que se manifiesta en las exigencias que históricamente se le han presentado al hombre en su desarrollo como tal y que sirve, a su vez, como fuerza motriz para dicho desarrollo. En este caso se trata del propio pensamiento del hombre, que a su vez dio lugar al desarrollo de los conocimientos en general, y en particular de los matemáticos.

Este proceso representa también una acumulación de hechos que pueden ser considerados cuantitativos en una etapa inicial, pero que producen transformaciones en la esencia misma del hombre, integrándose en un proceso más vasto y profundo en el que se originan cambios esenciales en su «cualidad» –digamos cualitativos– y que se generan al encadenarse los primeros en procesos generalizados que los integra a todos y permite al hombre encontrar soluciones más generales para los diferentes problemas particulares que se han presentado históricamente. Por supuesto, estos cambios se presentan también en la actualidad y constituyen un motor esencial para el desarrollo de la ciencia en particular y para la humanidad en general, y en los que se modifican aspectos que están en la esencia de la ciencia misma.

Otro hecho relevante en el camino de la formación del concepto de integral se gestó en el siglo II antes de nuestra era. Arquímedes (287-212), considerado como el intelecto científico y matemático más excelso del mundo antiguo y también el primer matemático moderno en virtud de la libertad de sus métodos, solo comparable con Newton (Inglaterra, siglo XVII) y Gauss (Alemania, siglo XIX), se anticipó al cálculo integral y diferencial en el problema de trazar una tangente a su espiral equiangular y en los cálculos de cuadraturas de áreas y volúmenes. Entre lo más conocido de su obra se encuentra el llamado método de exhaución o *exhaustion,* el cual usa para probar la unicidad, en cada caso particular, de un cierto límite (aún no se conocía este concepto ni se pudo utilizar este método para darle solución posterior a la cuestión de la existencia del límite) de las áreas de una sucesión de figuras geométricas elementales, esencialmente triángulos y trapecios y también paralelogramos, inscritas y circunscritas en otra no elemental y de la cual se quiere calcular su área (lo utilizaba también para el cálculo de volúmenes de cuerpos, longitud de curvas, búsqueda de las tangentes a una curva, entre otros problemas). Esta demostración de unicidad la realizaba usando el método de reducción al absurdo, llamado también por algunos autores método apagógico o razonamiento *apagógico* cuando se entiende como *método* de prueba indirecta.



El problema más conocido así resuelto por Arquímedes es el de la cuadratura de la parábola, en la cual se pide calcular el área de un segmento parabólico oblicuo ABC, cortado por una cuerda AC.

Este método de reducción al absurdo, que entre otras cosas permitió calcular el área aproximada de figuras no elementales mediante la acotación por sumas superiores e inferiores de áreas de polígonos elementales, fue uno de los más profundos de la matemática antigua y su rigor lógico no fue superado durante muchos siglos. No obstante, por ser su forma aún muy imperfecta y presentar la dificultad de que se desarrollaba solo en problemas concretos donde la unicidad del «límite» se demostraba en cada caso particular, no se convirtió en un método abstracto que posibilitara resolver los problemas de una manera general.

A pesar de las insuficiencias del método, los resultados obtenidos aportaron nuevos hechos cuantitativos al permitir calcular, además, áreas de otras figuras particulares no limitadas por rectas, lo que representó un avance en la búsqueda de un salto cualitativo para llegar al concepto de integral que no se dio sino hasta el siglo XVII, con los trabajos de Newton y Leibniz. No obstante, la aparición del análisis infinitesimal fue el resultado de un largo proceso que consistió en la acumulación y asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial e integral y de la teoría de las series.

Para el desarrollo de este proceso que dio lugar al salto cualitativo antes mencionado (ley de la transformación de los cambios cuantitativos en cualitativos) en la formación de la noción de integral, entre otros conceptos importantes, se dieron en este siglo premisas o condiciones previas esenciales como lo fueron la existencia del álgebra ya formada y las técnicas de cálculo, el método de coordenadas, la asimilación de las ideas de los infinitésimos de los antiguos, especialmente de Arquímedes, la acumulación de métodos de resolución de problemas, de cuadraturas, curvaturas, búsqueda de tangentes, entre otros.

Lo planteado confirma una vez más que el desarrollo científico está condicionado históricamente y se produce cuando existen las condiciones para ello y se presentan nuevas exigencias del propio desarrollo, en este caso de la mecánica, la astronomía y la física. Una prueba fehaciente de este condicionamiento histórico es que el análisis infinitesimal, al igual que en otros descubrimientos científicos importantes, surge como una parte independiente de las matemáticas, casi simultáneamente en dos formas diferentes y por dos personas diferentes sin contacto entre sí:

- En la forma de la denominada teoría de las fluxiones fue Newton quien obtuvo la mayoría de sus resultados entre los años 1660 y 1670, y aunque no se apuró en publicarlos, los obtuvo primero que Leibniz.
- En la forma del cálculo de los diferenciales fue G. W. Leibniz (Alemania, 1646-1716) el primero en utilizar el signo de integral () por él ideado. Publicó en 1684 la primera memoria –un tratado de cálculo diferencial– y en 1686 realizó otra publicación en la cual se concentran las reglas de integración de muchas funciones elementales. En el transcurso de los años 1702-1703 elaboró métodos de integración de funciones racionales.

El valor práctico y la sencillez operativa del cálculo de Leibniz atrajeron la atención de los científicos de su época que lo convirtieron en su herramienta fundamental de investigación. De este modo surge el concepto de integral como un límite donde se niegan, en el sentido de la negación dialéctica, las sumas particulares de los métodos anteriores y se hace mediante un proceso generalizado de «sumas infinitas». Se conserva la esencia del método de Arquímedes pero se niegan los métodos particulares (ley de la negación dialéctica) y, entre otros problemas, resuelve el del cálculo de áreas de figuras cualesquiera, como un todo, sin necesidad de descomponerla en figuras elementales, aunque en su proceder matemático se pasa por un proceso de sumas superiores e inferiores de rectángulos.

En este ejemplo se aprecia un salto cualitativo a partir de la acumulación de hechos cuantitativos, en este caso de carácter científico, y también la forma dialéctica de la negación, pues se toma de la totalidad de lo anterior todo lo que es útil para la transformación que se requiere. El nuevo proceder resuelve todos los problemas anteriores y también nuevos, especialmente en el campo de la matemática y en otros más como el de la física, poniendo de manifiesto que la práctica es el único criterio de verdad.

4. LA TEORÍA DEL CONOCIMIENTO Y SU PAPEL EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

La teoría del conocimiento del materialismo dialéctico, explicitada por Lenin en su obra *Materialismo y empiriocriticismo* (1976), establece como premisas esenciales que:

- Existen cosas independientemente de nuestra conciencia, independientemente de nuestras sensaciones, fuera de nosotros, y las sensaciones constituyen un reflejo de esas cosas.
- No existe, ni puede existir absolutamente ninguna diferencia de principio entre el fenómeno y la cosa en sí, es decir, existe simplemente diferencia entre lo conocido y lo que aún no es conocido, y para Lenin no existen cosas inasequibles al conocimiento.
- En una teoría del conocimiento, como en todo, hay que razonar con dialéctica, o sea no suponer jamás que nuestro conocimiento es acabado e inmutable, sino indagar de qué manera el conocimiento nace de la ignorancia, de qué manera el conocimiento incompleto e inexacto llega a ser más completo y más exacto.

Según Lenin, el conocimiento es un reflejo activo, orientado y adecuado de la realidad en el cerebro humano, comprobado en la práctica social. Para él, el conocimiento surge en un proceso de interacción que se establece entre el individuo y el mundo por medio del cerebro, y la única fuente de conocimientos es el mundo material. De esta manera, el hombre es el sujeto del conocimiento y el objeto son las cosas y fenómenos de la realidad destacados por él e incorporados a su actividad.

En esta concepción, la actividad práctica humana juega un papel determinante en el proceso de adquisición de conocimientos, pues al permitirle al hombre introducir las cosas de la realidad en su esfera cognoscitiva, esta se convierte en objeto de conocimiento. Por otra parte, el hombre influye activamente sobre el mundo mediante la actividad práctica, pero no en forma aislada e individual, sino en interrelación con otros, con la sociedad en su conjunto.

La vía del conocimiento, según la teoría del conocimiento del materialismo dialéctico, ya referida en páginas anteriores, comienza en la percepción viva (en la práctica) y culmina en la práctica, en condiciones cualitativamente superiores después que ha sido enriquecida por un proceso de elaboración intelectual. Esta teoría es la base, no solo desde el punto de vista gnoseológico sino también metodológico, en la concepción de la matemática en la escuela de educación general cubana. En especial, se tienen en cuenta posiciones psicológicas que parten de esta teoría y han estructurado a partir de ella otras, diversas, que se han convertido en el sustento psicopedagógico de la concepción de la enseñanza de la matemática en la educación general en Cuba. Entre las más significativas se encuentran:

- La concepción acerca del desarrollo y la influencia de lo social en el mismo Vigotsky (1988).
- La teoría de la actividad, y sus implicaciones, muy en especial la necesidad de la motivación (interés), la orientación, la ejecución y el control, y en particular lo que ello significa para la resolución de problemas: Vigotsky (1988), Leontiev (1976), Rubinstein (1969), Campistrous y Rizo Cabrera (1987).
- La teoría de las acciones mentales en el proceso de aprendizaje, en especial la interiorización de las mismas y sus implicaciones didácticas: Galperin (1982, 1988).
- La posibilidad de aprender (interiorizar) procedimientos generalizados y, por tanto, la necesidad de enseñarlos: (Talizina, 1992).

Estas posiciones se revelan en: la concepción metodológica de la matemática; el trabajo en la formación de conceptos; el desarrollo de procedimientos algorítmicos y heurísticos, en especial en la resolución de problemas como antes se ha planteado; el trabajo con teoremas matemáticos, entre otras situaciones típicas de la enseñanza de la matemática.

También esta teoría del conocimiento ha sustentado la concepción completa de un complejo de enseñanza, como es el caso de la enseñanza de la geometría en la escuela básica cubana, que ha sido concebida por la autora de este trabajo en su tesis doctoral de la forma siguiente:

PRÁCTICA	
De primero a cuatro grado:etapa intuitiva	De quinto a noveno grado: etapa racional
Estudio intuitivo operativo de los conceptos y relaciones geométricas elementales a partir de los objetos del medio y modelos, sobre una base concreto sensorial y algunos elementos racionales del pensamiento (análisis, síntesis y primeras generalizaciones). No se incluyen inferencias del orden lógico formal de la matemática, pero sí muchos procedimientos lógicos asociados a conceptos y juicios, incluso a razonamientos, pero con argumentos basados en su experiencia práctica concreta. Todo lo que aprenden lo utilizan nuevamente en la práctica para identificar formas, establecer relaciones, entre otras acciones concretas.	Estudio racional de los conceptos y relaciones geométricos elementales, incluyendo la deducción matemática. Aunque el trabajo se hace a un nivel mayor de abstracción y generalización, se parte igualmente de las relaciones que se dan en el mundo material y en modelos que lo representan, y después se regresa a la práctica con las aplicaciones de lo aprendido. Se incluyen inferencias de la matemática formal y muchos procedimientos lógicos asociados a conceptos, juicios y razonamiento con un nivel más elevado en el desarrollo del pensamiento, razón por la cual se le llamó a esta etapa racional, aunque en rigor en ambas hay niveles importantes de racionalidad.

En este caso, en la concepción general se aprecia claramente la vía del conocimiento de la teoría marxista leninista, e incluso dentro de cada etapa también se manifiesta esta vía, pero en niveles de desarrollo diferentes, acorde con las edades de los alumnos. La misma sustenta los programas de la educación primaria vigentes en Cuba y su representación en los libros oficiales de la escuela primaria en ese país.

De este modo se concluye este trabajo en el que, como se planteó al inicio, se trata de esclarecer posiciones acerca de la relación de algunos aspectos filosóficos importantes y la matemática, como ciencia y como asignatura.

BIBLIOGRAFÍA

ANDRÉIEV, I. (1984). *Problemas lógicos del conocimiento científico.* Moscú: Progreso.

BOYER, C. (1986 y 2003). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza.

CAMPISTROUS, L. y RIZO CABRERA, C. (1987). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* La Habana: Pueblo y Educación.

CAMPISTROUS L. y OTROS (1991). *Orientaciones metodológicas duodécimo grado. Matemática.* La Habana: Pueblo y Educación.

ENGELS, F. (1961). *Dialéctica de la naturaleza.* México: Grijalbo.

— (1975). *Anti-Dühring*. La Habana: Pueblo y Educación.

GALPERIN P. (1982). *Introducción a la psicología.* La Habana: Pueblo y Educación.

— (1988). *Desarrollo de las investigaciones sobre las acciones mentales.* La Habana: Impresos Universidad de La Habana.

GUZMÁN, M. de (1993). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Madrid: OEI / Popular. ISBN: 84-7884-092-3.

LENIN, V. I. (1976). *Materialismo y empiriocriticismo.* Obras escogidas en 12 tomos. Tomo IV. Moscú: Progreso.

— (1986). *Cuadernos filosóficos.* Obras Completas. Tomo 29. Moscú: Progreso.

LEONTIEV, A. N. (1976). *Actividad, conciencia, personalidad*. La Habana: Pueblo y Educación.

RIZO CABRERA, C. (1987). *Investigación sobre la estructuración del curso de geometría de 4.º a 6.º grados, basada en las transformaciones y la congruencia.* Tesis doctoral. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de la República de Cuba. Comisión Nacional de Grados Científicos.

RIZO CABRERA, C. y OTROS (1989). *Matemática 5.* Quinto Grado. La Habana: Pueblo y Educación.

RIZO CABRERA, C. y OTROS (1990). *Matemática 6.* Sexto Grado. La Habana: Pueblo y Educación.

RUBINSTEIN, S. L. (1969). *Principios de psicología general.* La Habana: Edición Revolucionaria.

TALIZINA, Nina F. (1992). *La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares*. La Habana: Ministerio de Educación Superior.

VIGOTSKY, L. S. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. México: Grijalbo.