

# Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva

SILVIA DEL PUERTO  
SILVIA SEMINARA

Universidad Tecnológica Nacional, Argentina

CLAUDIA MINNAARD

Universidad Nacional de Lomas de Zamora, Argentina

---

## 1. Introducción

El error es posible en todo proceso de adquisición y consolidación de conocimientos. El conocimiento humano es *fallible*, esto es: unida a la capacidad que tiene el ser humano de conocer, se halla siempre presente la posibilidad de que conceptos y procedimientos deficientemente desarrollados, y aún completamente equivocados, sean considerados como verdaderos.

Es con Popper que el problema adquiere un notable protagonismo: este filósofo propone cambiar el interrogante de “¿cuál es la fuente última del conocimiento?” por el de “¿cómo podemos detectar y eliminar el error?”, y propone el *racionalismo crítico* como postura adecuada para explicar —y asegurar— el avance de la ciencia. El avance del conocimiento, afirma, consiste en la modificación del conocimiento anterior, a partir de someter a prueba las afirmaciones tenidas por verdaderas hasta el momento; la observación, el razonamiento y la intuición tienen, como función fundamental, contribuir al examen crítico de las conjeturas. Esta postura confiere al error el status de *parte constituyente* del proceso de adquisición del conocimiento: es intrínseco a nuestro modo de conocer, así como lo es la crítica permanente para detectarlo (Popper, 1979, citado por Rico, 1995).

Lakatos aporta elementos en el mismo sentido al referirse a las conjeturas que se plantean para tratar de resolver un problema abierto: a la propuesta de una conjetura sigue la crítica de la misma a la luz de contraejemplos, y la eventual superación —ya sea limitando su aplicabilidad o completando su contenido— en un juego dialéctico en el que la detección y utilización positiva del error tiene un rol fundamental en la transformación o el enriquecimiento de una teoría (Lakatos, 1978, citado por Rico, 1995).

Tanto Popper como Lakatos introducen la idea innovadora de que es posible la transmisión y permanencia en el tiempo de una concepción errónea, en contra de la postura clásica de que el conocimiento científico se basa en el descubrimiento y la transmisión de una verdad objetiva: la verdad es verdad sólo en relación a una estructura de conocimientos y a una metodología vigentes en ese momento, con la posibilidad latente de ser superada. Lakatos considera el error como producto de una concepción limitada y señala que un conocimiento puede ser considerado correcto o no, sólo a la luz de las teorías

imperantes, por lo que no tendría sentido alguno juzgar el grado de corrección de un conocimiento desde marcos de referencia extemporáneos (Socas, 1997).

Por su parte Bachelard introdujo el concepto de *obstáculo epistemológico* para explicar la aparición de los errores en la conformación del conocimiento (Bachelard, 1988, citado por Rico, 1995). Señala que los entorpecimientos y confusiones, que causan estancamientos y retrocesos en el proceso del conocimiento, provienen de una tendencia a la *inercia*, a la que da el nombre de *obstáculo*: se conoce *en contra* de un conocimiento anterior (insuficiente o adquirido deficientemente) que *ofrece resistencia*, la mayoría de las veces porque se ha *fijado* en razón de haber resultado eficaz hasta el momento; cuando se lo pretende utilizar en un contexto o una situación inadecuados, se produce el error.

Brousseau tomó las ideas de Bachelard y las desarrolló en el ámbito específico del aprendizaje de la matemática. En su trabajo distingue entre obstáculos de origen *psicogenético*, que están vinculados con el estadio de desarrollo del aprendiz, los de origen *didáctico*, vinculados con la metodología que caracterizó al aprendizaje, y los de origen *epistemológico*, relacionados con la dificultad intrínseca del concepto que se aprende y que pueden ser rastreados a lo largo de la historia de la matemática, en la génesis misma de los conceptos. En todos los casos se destaca el carácter de *resistentes* que presentan estos obstáculos, y es necesaria su identificación, para luego alcanzar los nuevos conocimientos a partir de su superación.

El cognitivismo sostiene que *la mente del alumno no es una página en blanco*: el alumno tiene un saber anterior, y estos conocimientos anteriores pueden ayudar al nuevo conocimiento, pero a veces son un obstáculo en la formación del mismo. El conocimiento nuevo no se agrega al antiguo, sino que lucha contra él y provoca una nueva estructuración del conocimiento total. Los errores cometidos por los alumnos en matemática son una manifestación de esas dificultades y obstáculos propios del aprendizaje, y se acepta unánimemente que es necesaria la detección y análisis de los mismos, y su utilización positiva en una suerte de realimentación del proceso educativo.

Mulhern (1989) (citado por Rico, 1995) señala las siguientes características de los errores:

- Surgen, por lo general, de manera espontánea y sorprenden al profesor; son persistentes y difíciles de superar, ya que requieren una reorganización de los conocimientos en el alumno; pueden ser sistemáticos o por azar: los sistemáticos son más frecuentes y revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada, y los cometidos por azar son ocasionales; muchas veces los alumnos no toman conciencia del error ya que no comprenden acabadamente el significado de los símbolos y conceptos con que trabajan.
- Hay patrones consistentes en los errores a dos niveles: a *nivel individual*, ya que las personas muestran gran regularidad en su modo de resolver ejercicios y problemas similares y a *nivel colectivo*, ya que distintas personas cometen errores semejantes en determinadas etapas de su aprendizaje.

## 2. Metodología

El propósito del trabajo realizado fue identificar y analizar los errores más frecuentes cometidos por los alumnos en Probabilidad y Estadística. La asignatura corresponde al tercer cuatrimestre del Ciclo Básico

del Plan de Estudios de las carreras de Ingeniería Mecánica e Industrial de la Universidad Nacional de Lomas de Zamora. Para cursar esta asignatura deben tener conocimientos previos de Matemática I y II, Análisis Matemático I y Álgebra. Los alumnos que cursan sus materias "al día" la cursan junto con Análisis II y Física I.

Los alumnos asisten regularmente a clases tradicionales de 1 vez por semana con una carga horaria de 4 horas reloj en el transcurso de un cuatrimestre. Son evaluados en forma parcial en dos oportunidades y rinden un examen final para la aprobación de la materia en caso de no alcanzar la promoción directa. La materia se desarrolla a partir de tres temas fundamentales: Estadística descriptiva, Probabilidad y Estadística Inferencial. El primer tema comprende todo aquello que hace a la terminología específica de la materia, como así también los métodos de recopilación, tabulación, graficación y análisis descriptivo de los datos. El segundo tema comprende desde los conocimientos básicos de probabilidad, cuando la incertidumbre está presente, hasta las leyes específicas de probabilidad, que luego serán de aplicación en los problemas de toma de decisiones bajo riesgo y de inferencia estadística. El tercer tema comprende los métodos estadísticos necesarios para obtener información de las poblaciones utilizando para ello los datos muestrales, como así también los métodos de comparación de poblaciones. La materia está organizada sobre la base del dictado de clases teórico prácticas. La forma de desarrollar un tema es la siguiente: en primer lugar se presenta un problema y luego la base teórica que justifica la aplicación de una determinada técnica que permita su solución.

Con el objeto de relevar los errores más frecuentes se analizaron todos los exámenes parciales (519) (correspondientes al período 2001-2004) de la asignatura Probabilidad y Estadística. Se determinaron luego los errores recurrentes dentro de cada unidad temática indicando la frecuencia en que se cometían.

Cabe señalar que los exámenes responden generalmente a la misma estructura: para el primer parcial evalúa Estadística descriptiva, Probabilidad y Distribuciones de Probabilidad y para el segundo parcial.

Distribuciones de Muestreo, Intervalos de Confianza, Pruebas de Hipótesis para una y dos poblaciones, Análisis de la Varianza y Regresión y Correlación.

El relevamiento propiamente dicho fue precedido por una amplia búsqueda bibliográfica sobre el estado del arte en el estudio de los errores cometidos por los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas.

A modo de ejemplo de la metodología empleada, se anexa un ejercicio de parcial y el correspondiente tratamiento de los errores desde el punto de vista cuantitativo.

*Los salarios de 500 empleados de una empresa se distribuyen de la siguiente manera:*

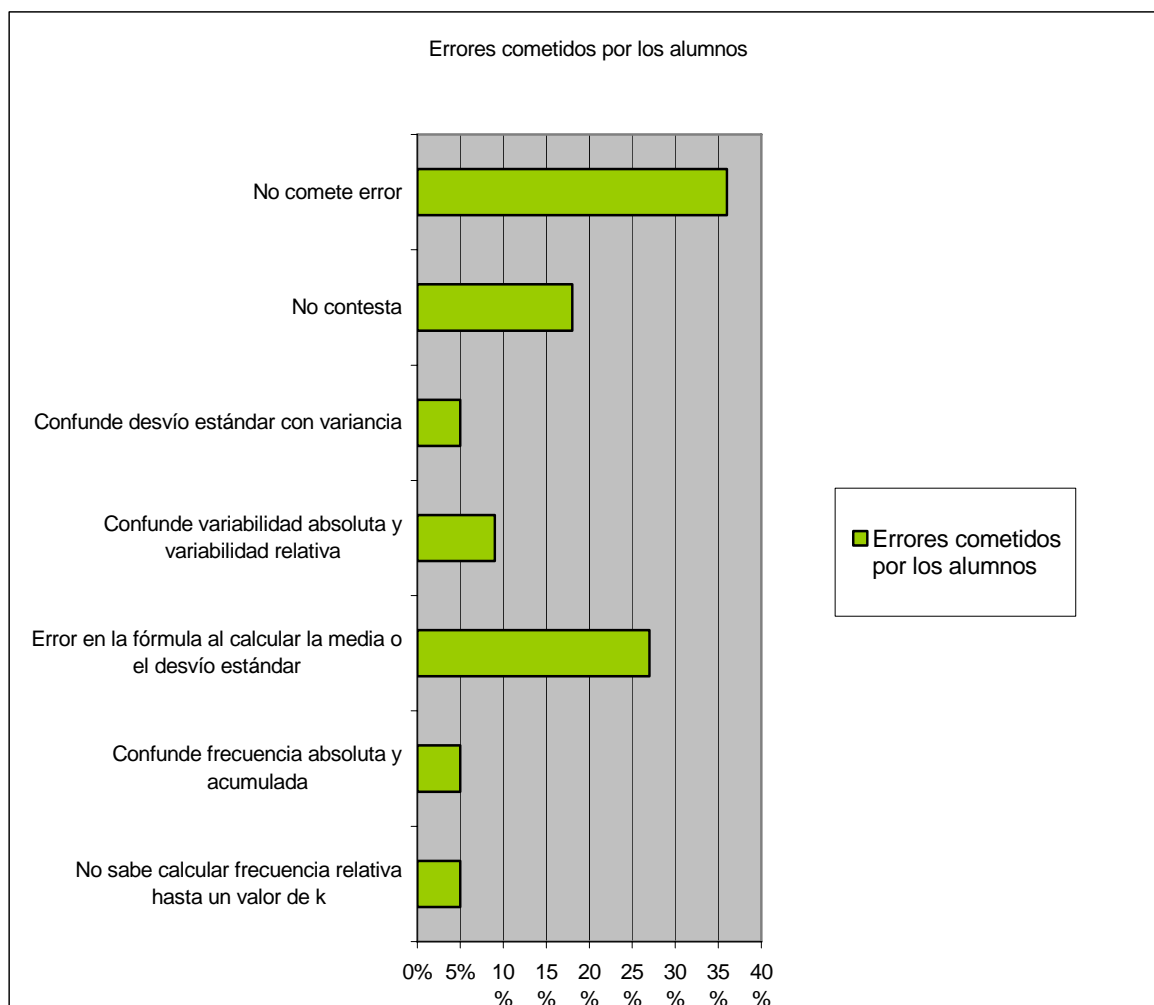
SALARIOS	N.º DE EMPLEADOS
300 – 500	70
500 – 700	90
700 – 900	140
900 – 1100	120
1100 – 1300	60
1300 – 1500	20

- a) Analizar la variabilidad relativa
- b) ¿Qué porcentaje de empleados tiene un salario superior a la media?

EJERCICIO 1:

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

TIPOS DE ERRORES	PORCENTAJE
No sabe calcular frecuencia relativa hasta un valor de la variable	5%
Confunde frecuencia absoluta y acumulada	5%
Error en la fórmula al calcular la media o el desvío estándar	27%
Confunde variabilidad absoluta y variabilidad relativa	9%
Confunde desvío estándar con variancia	5%
No contesta	18%
No comete error	36%



El análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje provee una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático; por otro lado, constituye una excelente herramienta para relevar el estado de conocimiento de los alumnos, imprescindible a la hora de realimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de mejorar los resultados.

Los procesos mentales no son visibles, y sólo es posible conjeturar su ocurrencia a través de manifestaciones indirectas. Los errores cometidos por los alumnos, la regularidad con que éstos aparecen, los patrones comunes a que obedecen, son algunos de los elementos que permiten hacer inferencias acerca de estos procesos mentales, y acerca de las estructuras en que se van organizando los conocimientos.

Siguiendo el procedimiento descrito se relevaron los 519 exámenes parciales correspondientes al período 2001-2004. Finalizado este relevamiento, se elaboró un listado con los errores más frecuentes, organizados por unidades temáticas, señalándose, además, la categoría (según Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Invar., citados por Rico 1995) a que correspondía cada uno. A partir de aquí se elaboró una tabla de doble entrada donde se incluyeron los porcentajes de ocurrencia de cada tipo de error. Se eligió el criterio de clasificación mencionado en razón de ajustarse casi perfectamente a los tipos de errores recurrentes que se fueron encontrando (no ocurría lo mismo con otras categorizaciones, en las que no resultaba inmediata la categoría a que debían asignarse algunos de los errores).

La tabla correspondiente a Estadística Descriptiva se presenta a continuación:

	I: Datos mal utilizados	II: Interpretación incorrecta del lenguaje	III: Inferencias no válidas lógicamente	IV: Teoremas o definiciones deformadas	V: Falta de verificación de la solución	VI: Errores técnicos
ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA	26,73%	17,97%	3,69%	21,20%	1,38%	29,03%

### 3. Errores en Estadística Descriptiva

<p>ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Calculan mal la media o el desvío estándar.</li> <li>Confunden media con mediana o mediana con modo.</li> <li>Calculan la amplitud cuando es dato.</li> <li>Confunden varianza con desvío estándar.</li> <li>Confunden variabilidad relativa y absoluta.</li> <li>Toman frecuencias negativas.</li> <li>Confunden frecuencia absoluta y acumulada.</li> <li>Confunden percentiles (por ejemplo: <math>P_{20}</math> con <math>P_{80}</math>).</li> </ul>
--

La destreza en la lectura crítica de datos es un componente de la alfabetización cuantitativa y una necesidad en nuestra sociedad tecnológica. Curcio (1989, citado por Batanero 1994) describe tres niveles distintos de comprensión de los gráficos:

- a) *Leer los datos*: este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo.
- b) *Leer dentro de los datos*: incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas.
- c) *Leer más allá de los datos*: requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico.

Cuando los alumnos cometen el error: *Calculan la amplitud cuando es dato* no han podido leer los datos, calculando una medida que se desprendía de la observación directa de las tablas que se les presentaban.

Los errores cometidos con respecto a las medidas de tendencia central : media, mediana y modo hacen necesario un análisis más detallado.

Batanero (2000) afirma que *la comprensión de un concepto no puede reducirse a conocer las definiciones y propiedades (elementos intensivos), sino a reconocer los problemas donde debe emplearse el concepto (elementos extensivos), las notaciones y palabras con que lo denotamos y en general todas sus representaciones (elementos ostensivos), habilidad operatoria en los diferentes algoritmos y procedimientos relacionados con el concepto (elementos activos) y capacidad de argumentar y justificar propiedades relaciones y soluciones de problemas (elementos validativos).*

El cálculo de la media parece sencillo, pero muchas veces el algoritmo se aplica sin comprender su significado. Cuando los alumnos empiezan a estudiar la media, mediana y modo por primera vez, inconscientemente aplican algunas propiedades de la suma y de la multiplicación que no se cumplen por ejemplo en el caso de la media. Mevarech (1983, citado por Batanero, 2000) observa que los estudiantes suelen creer que un conjunto de números, junto con la operación media aritmética constituye un grupo algebraico, satisfaciendo los cuatro axiomas: clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso.

El siguiente problema aparentemente "simple" presentó dificultades para los alumnos:

*Hay seis vuelos diarios desde Mendoza a Buenos Aires. La siguiente tabla muestra la cantidad de minutos que cada vuelo llegó tarde (o temprano) en su arribo a Buenos Aires. Un número positivo indica que el vuelo llegó tarde, un valor 0 indica que el vuelo llegó a horario y un valor negativo que llegó temprano.*

4                      12                      -9                      6                      -10                      0

*Determine el tiempo promedio de arribo. Justifique su respuesta.*

El 11% de los alumnos no pudo calcular la media, y un 24% no contestó el problema. Solamente un 8% no cometió error. Al conversarlo con los estudiantes, estos admitieron que la presencia de datos negativos y el 0 dificultaron la comprensión del problema.

Por otra parte, tal como afirman Cobo y Batanero (2000) el cálculo de la mediana es complejo, porque el algoritmo de cálculo es diferente según tengamos un número par o impar de datos, y según los datos se presenten en tablas de valores de datos agrupados o sin agrupar y también el valor obtenido es

diferente, según se aplique uno u otro algoritmo. Esto puede resultar difícil para los alumnos que están acostumbrados a un único método de cálculo y una única solución para los problemas matemáticos. Esto mismo ocurre para el cálculo de los percentiles. Los alumnos no entienden que tanto la mediana como los percentiles se refieren al conjunto ordenado de datos.

Al pedirle a los alumnos que interpreten el resultado obtenido en términos del problema propuesto, al calcular el salario medio = \$1500, se han obtenido respuestas como *“la mayoría de los empleados gana alrededor de \$1500”* o *“es el salario central: los otros trabajadores ganan más o menos de \$1500”* lo que indica una clara confusión entre los conceptos de media, mediana y modo.

El estudio de una distribución de frecuencias no puede limitarse al estudio de las medidas de tendencias central, ya que distribuciones con medias iguales pueden tener distinta variabilidad.

Las mismas dificultades encontradas para el cálculo de la media, se manifestaron en el cálculo del desvío estándar.

En el siguiente problema, el 30 % alumnos encontró dificultades tanto para el calculo de la media como para el del desvío estándar.

*Los siguientes datos corresponden a las remuneraciones percibidas por empleados de una empresa que cuenta con un plantel de 1500 personas en la planta BETA.*

REMUNERACIÓN (en pesos)	200-500	500-800	800-1100	1100-1400	1400-1700	1700-2000
CANTIDAD DE EMPLEADOS	220	264	385	325	179	127

- ¿Cuál es la remuneración promedio?
- Calcular e interpretar la variabilidad relativa. Justificar utilizando los conceptos estadísticos adecuados.

Al trabajar con frecuencias “grandes” los alumnos cometen errores de cálculo, como así también aplican mal la fórmula de desvío estándar, confundiéndola con suma de cuadrados. Asimismo, confunden variabilidad relativa y absoluta, comparando dos distribuciones utilizando el desvío estándar, sin tener en cuenta que las medias son distintas. El 10% de los alumnos calcula bien el desvío estándar pero lo interpreta mal. Por otra parte términos como: dispersión, variabilidad, desviación, variación son claros para el docente pero no lo son tanto para los alumnos. En el Foro Internacional de Razonamiento, Pensamiento y Literatura Estadístico (SRTL-3) en la Universidad de Nebraska (USA) en julio de 2003, los investigadores reforzaron su creencia de que el concepto de variabilidad es un tópico complejo para entender, aprender y enseñar, y que su comprensión es un componente fundamental en el razonamiento y pensamiento estadístico.

## 4. Conclusiones

Al cabo de varios años de trabajo con distintos grupos de alumnos en una misma asignatura, es posible acopiar una verdadera “biblioteca de errores típicos” cuya presencia podrá testearse a través de

cuestionarios , o bien diseñando evaluaciones que permitan detectarlos. Una vez comprobada la presencia de un error, el docente podrá diseñar actividades *ad hoc* que ayuden a los alumnos a sortear el obstáculo, de manera de hacer más fructífero el proceso de aprendizaje. Especial atención merecen los errores detectados en la obtención de información espacial y en la traducción del lenguaje coloquial al matemático, pues serán una señal inequívoca de que es necesario intensificar el trabajo paralelo en diferentes registros de representación.

En las concepciones actuales, el error ha dejado de ser algo a penalizar para convertirse en una fuente valiosa de información, en una señal de hacia dónde se debe reorientar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es también un recurso de motivación, una oportunidad para que el alumno argumente, discuta y revea sus conocimientos, para lograr una mejor comprensión y una mayor familiaridad con el razonamiento lógico y matemático.

Estas ideas son consistentes con un cambio del paradigma pedagógico que propone abandonar la búsqueda de la respuesta exacta como única alternativa (lo que no deja de ser una forma de condicionamiento) para optar por el trabajo más enriquecedor que consiste en reflexionar críticamente sobre las propias producciones.

## Bibliografía

- BATANERO, C. (2000): "Significado y comprensión de las medidas de tendencia central". en *Uno. Revista de didáctica de las Matemáticas*. Barcelona. Editorial Graó, n.º 35, pp. 41-58.
- BATANERO, C.; GODINO, J. D.; GREEN, D. R.; HOLMES, P., y VALLECILLOS, A. (1994): "Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts", en *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, n.º 25 (4), pp. 527-547.
- COBO, B., y BATANERO, C. (2000). "La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto sencillo?", en *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Barcelona. Editorial Graó, n.º 23, pp. 85-96.
- DEL PUERTO, S.; MINNAARD, C., y SEMINARA, S. (2004): "Errores en el aprendizaje de las Matemáticas", en *Elementos de Matemática*. Publicación Didáctico Científica de la Universidad CAECE. 1.º parte, 19 (74), pp. 5-18. 2.º parte, 19 (75), pp.17-32.
- RICO, L. (1995): "Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas", cap. 3., pp. 69-108, en KILPATRIK, J.; GÓMEZ, P., y RICO, L.: *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.
- RICO, L., y CASTRO E. (1994): "Errores y dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico". [http://ddm.ugr.es/gpnumerico/numerico\\_es.html](http://ddm.ugr.es/gpnumerico/numerico_es.html).
- SOCAS, M. (1997): "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria", cap. 5., pp. 125-154, en RICO, L., y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Ed. Horsori. Barcelona.
- SOCAS, M., y PALAREA, M. M. (1997): "Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar", en *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Barcelona. Editorial Graó, n.º 14, pp. 7-24.

Correo electrónico: minnaard@uolsinectis.com.ar - spuerto@uolsinectis.com.ar - sseminara@uolsinectis.com.ar